

# Campo de un solenoide cilíndrico

De Laplace

## Contenido

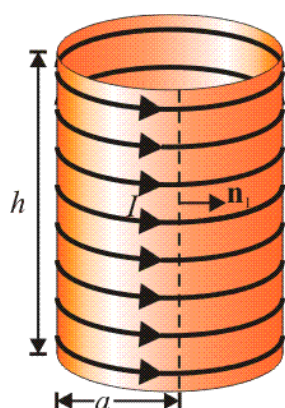
- [1 Enunciado](#)
- [2 Densidad superficial de corriente](#)
- [3 Campo en un solenoide infinito](#)
- [4 Campo en un solenoide finito](#)
  - [4.1 Dependencia con la posición](#)
  - [4.2 El límite de un solenoide infinito](#)
  - [4.3 Campo en el centro y en el borde](#)
    - [4.3.1 En el centro](#)
    - [4.3.2 En el borde](#)

## 1 Enunciado

Un solenoide de radio  $a$ , altura  $h$  y  $n$  espiras por unidad de longitud, puede aproximarse por una distribución de corriente superficial sobre un cilindro.

1. Halle el valor  $K$  equivalente a que por las espiras circule una corriente  $I$ .
2. Empleando las leyes de la magnetostática, calcule el campo producido por el solenoide, si  $h \rightarrow \infty$ .
3. Mediante integración directa, halle el campo magnético en los puntos del eje del cilindro si  $h$  es finito.
  1. Estudie el límite  $h \gg a$
  2. Compare los valores del campo en el centro del solenoide y justo en el borde de él. Considere los límites de una espira circular ( $h \ll a$  y de un solenoide infinito  $h \gg a$ )

## 2 Densidad superficial de corriente



Dada una densidad de corriente superficial, la relación entre ésta y la intensidad de corriente total que atraviesa una línea trazada en la superficie es

$$I_T = \int \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}_1 \, dl$$

donde  $\mathbf{n}_1$  es un vector unitario normal a la curva y tangente a la superficie.

Para establecer la correspondencia entre la corriente que circula por el solenoide y la densidad de corriente equivalente, imponemos que sea idéntica la corriente total que atraviesa una línea vertical trazada sobre el solenoide. Esta línea corta  $N$  espiras, siendo

$$N = nh$$

por lo que la corriente total que atraviesa la línea es

$$I_T = NI = nhI$$

con  $I$  la intensidad que circula por cada espira. Si se supone una densidad de corriente superficial  $\mathbf{K} = K\mathbf{u}_\varphi$  resulta

$$I_T = \int_0^h (K\mathbf{u}_\varphi) \cdot \mathbf{u}_\varphi \, dz = Kh$$

Igualando ambas cantidades se tiene la relación

$$K = nI$$

o, equivalentemente  $K = NI / h$ .

### 3 Campo en un solenoide infinito

Si la longitud del solenoide es muy grande comparada con su radio, podemos hacer la aproximación de un cilindro infinito, sobre el cual circula una corriente  $\mathbf{K} = K\mathbf{u}_\varphi$ .

El campo magnético de este solenoide ideal tiene, en principio, tres componentes

$$\mathbf{B} = B_\rho\mathbf{u}_\rho + B_\varphi\mathbf{u}_\varphi + B_z\mathbf{u}_z$$

Dada la [simetría](#) del sistema, estas componentes serán independientes tanto de la coordenada  $z$  (el sistema no cambia en una traslación a lo largo del cilindro), como de la coordenada  $\varphi$  (el sistema no cambia en una rotación). Las tres coordenadas sólo pueden depender de la coordenada  $\rho$ .

Teniendo esto en cuenta, podemos simplificar las ecuaciones diferenciales de la magnetostática. Si denominamos región 1 al interior del cilindro y 2 a la exterior, tanto en una región como en la otra, la ley de Gauss para el campo magnético queda

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho B_\rho)$$

por lo que

$$B_{1\rho} = \frac{c_1}{\rho} \quad B_{2\rho} = \frac{c_2}{\rho}$$

Sin embargo, el campo magnético no puede ser infinito en el eje del cilindro, en el que no hay ninguna densidad de corriente, por lo que

$$c_1 = 0$$

Por otra parte, la condición de continuidad en la componente radial del campo sobre la superficie del cilindro implica

$$0 = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}] = B_{2\rho} - B_{1\rho} \Rightarrow \frac{c_1}{R} = \frac{c_2}{R} \Rightarrow c_2 = c_1 = 0$$

Se deduce entonces que la componente radial es nula en todos los puntos del espacio. Este resultado puede también deducirse de la [ley de Gauss en forma integral](#). Si la componente radial fuera no nula habría un flujo distinto de cero en una superficie que rodeara al cilindro. Una situación similar se produce en el caso de un [hilo infinito](#).

Para las componentes acimutal,  $B_\varphi$ , y longitudinal  $B_z$ , tenemos la [ley de Ampère](#), que, teniendo en cuenta las simetrías, se reduce a

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \frac{d}{d\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \rho B_\rho & B_z \end{vmatrix} = -\frac{dB_z}{d\rho} \mathbf{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho B_\varphi) \mathbf{u}_z$$

El producto  $\mu_0 \mathbf{J}$  se anula tanto dentro como fuera del cilindro, por lo que, en cada región

$$\frac{dB_z}{d\rho} = 0 \Rightarrow B_{1z} = a_1 \quad B_{2z} = a_2$$

y, de la otra componente

$$\frac{d}{d\rho}(\rho B_\varphi) = 0 \Rightarrow B_{1\varphi} = \frac{k_1}{\rho} \quad B_{2\varphi} = \frac{k_2}{\rho}$$

Ahora bien, en el eje del cilindro, en el cual no hay corriente alguna, el campo no puede hacerse infinito, por lo que

$$k_1 = 0$$

Por otra parte, el campo debe anularse en el infinito, con lo que

$$a_2 = 0$$

Las dos constantes que quedan se determinan a partir de las condiciones de salto para las componentes tangenciales

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{B}] = \mathbf{u}_\rho \times \left( \left( \frac{k_2}{R} \mathbf{u}_\varphi \right) - (a_1 \mathbf{u}_z) \right) = \frac{k_2}{R} \mathbf{u}_z + a_1 \mathbf{u}_\varphi$$

Esta cantidad debe ser igual a  $\mu_0 \mathbf{K}$ , por lo que

$$\frac{k_2}{R} \mathbf{u}_z + a_1 \mathbf{u}_\varphi = \mu_0 K \mathbf{u}_\varphi \Rightarrow k_2 = 0 \quad a_1 = \mu_0 K$$

El resultado final es que en el exterior del solenoide no hay campo magnético

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{0} \quad (\rho > a)$$

mientras que en el interior, el campo es uniforme

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 K \mathbf{u}_z \quad (\rho < a)$$

o, en términos de la corriente que circula por las espiras

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 N I}{h} \mathbf{u}_z$$

Puede demostrarse, empleando la [ley de Biot y Savart](#), que este resultado es válido para cualquier solenoide, no necesariamente circular. Siempre que se tenga una superficie que se extiende indefinidamente en la dirección del eje Z, sobre la cual fluye una corriente de módulo uniforme y dirección perpendicular al eje Z, resulta un campo magnético nulo en el exterior y uniforme e igual a  $\mathbf{B} = \mu_0 K \mathbf{u}_z$  en el interior.

## 4 Campo en un solenoide finito

El campo en los puntos del eje puede aproximarse a partir de la superposición del campo de  $N$  [espiras](#), situada cada una a una altura  $z_i$ . El [campo debido a cada una de estas espiras](#) va en la dirección del eje Z y depende de la altura como una función en forma de campana.

$$\mathbf{B} \simeq \sum_{i=1}^N \frac{\mu_0 I a^2 \mathbf{u}_z}{2(a^2 + (z - z_i)^2)^{3/2}}$$

Esta expresión es aproximada porque sustituye lo que en realidad es una *hélice* por un conjunto de espiras circulares desconectadas entre sí.

La distancia  $\Delta z'$  entre dos espiras sucesivas es aproximadamente la inversa de la densidad (cuando  $N$  es grande), ya que

$$\Delta z' = \frac{h}{N-1} \simeq \frac{1}{n}$$

En el caso de un solenoide *densamente arrollado* esta distancia equivale al diámetro del hilo, ya que no quedan intersticios entre vueltas sucesivas.

Esto nos permite expresar el sumatorio como

$$\mathbf{B} \simeq \sum_{i=1}^N \frac{\mu_0 n I a^2 \Delta z' \mathbf{u}_z}{2(a^2 + (z - z_i)^2)^{3/2}}$$

pero  $nI = K$  es la densidad de corriente superficial equivalente. Por otra parte, podemos escribir el sumatorio en términos de  $z' = z_i$ , en vez de  $i$ , lo que nos deja el sumatorio como

$$\mathbf{B} \simeq \sum_{z'=0}^h \frac{\mu_0 K a^2 \mathbf{u}_z}{2(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \Delta z'$$

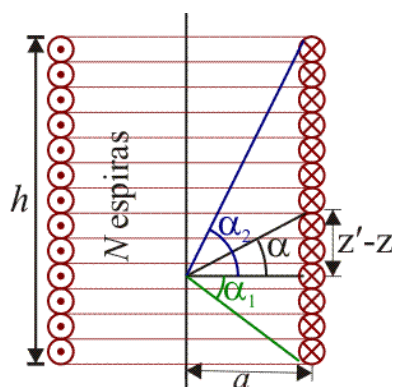
y, teniendo en cuenta que  $\Delta z'$  es una cantidad muy pequeña, comparada con la longitud de la bobina, podemos aproximar el sumatorio por una integral

$$\mathbf{B} \simeq \int_0^h \frac{\mu_0 K a^2 \mathbf{u}_z}{2(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dz'$$

Para resolver esta integral, como en el problema del [campo magnético de un segmento](#), hacemos el cambio de variable

$$z' - z = a \tan \alpha \quad a^2 + (z - z')^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha} \quad dz' = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

En este caso,  $\alpha$  representa la elevación con la que se ve un punto del solenoide, visto desde un punto del eje. Este



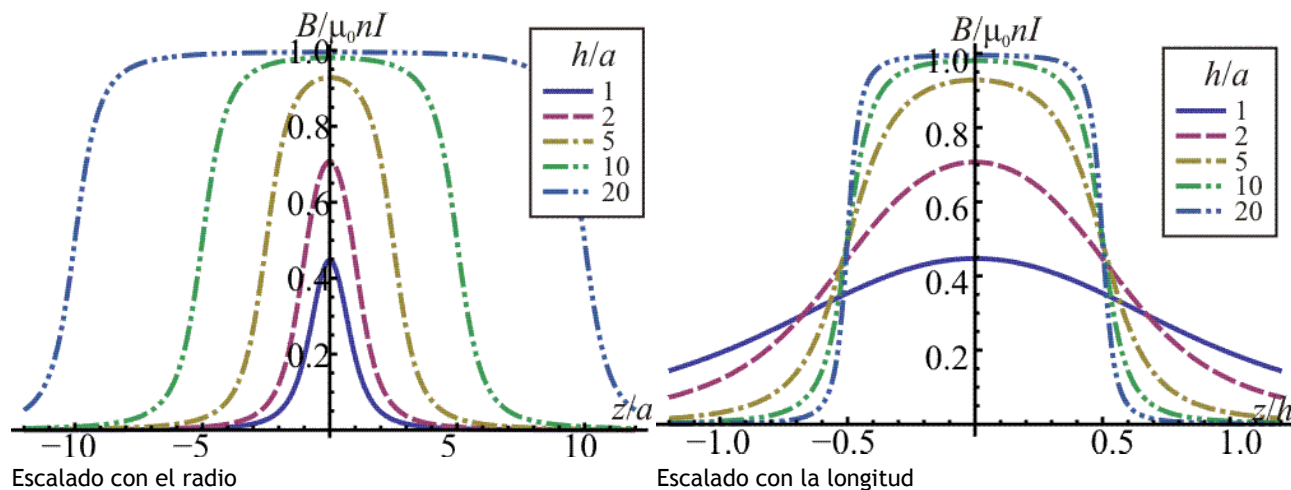
cambio de variable transforma la integral en

$$\mathbf{B} \simeq \frac{\mu_0 K \mathbf{u}_z}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 K \mathbf{u}_z}{2} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

con  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  los ángulos con los que se ven los extremos del solenoide.

#### 4.1 Dependencia con la posición

La forma del campo, como función de  $z$  posee aspecto de “meseta” que se reduce a una [campana](#) en el límite  $h \ll a$  (en el cual el solenoide se reduce a una espira), mientras que en el límite  $h \gg a$  el campo tiende a un valor constante en el interior de la bobina.



- En la gráfica de la izquierda vemos como varía el comportamiento con la longitud, para un radio fijado. A medida que aumenta  $h$  la curva se va aplanando y va tendiendo al valor límite del solenoide infinito.
- En la gráfica de la derecha aparece la variación en el comportamiento variando el radio, para una longitud fijada. A medida que el radio se va reduciendo la curva va tendiendo a una mesa, que cae bruscamente en los extremos del solenoide. El campo es prácticamente nulo fuera del solenoide.

#### 4.2 El límite de un solenoide infinito

En el caso de un solenoide con una longitud mucho mayor que su radio  $h \gg a$ , los ángulos tienen los límites

$$\alpha_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \sin \alpha_1 \rightarrow -1 \quad \alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \sin \alpha_2 \rightarrow 1$$

y el resultado se reduce al obtenido en el apartado anterior

$$\mathbf{B} \rightarrow \mu_0 K \mathbf{u}_z = \mu_0 n I \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 N I \mathbf{u}_z}{h}$$

con la diferencia de que en el apartado anterior demostramos que este resultado era cierto no sólo en los puntos del eje, sino en todos los puntos del interior del solenoide.

#### 4.3 Campo en el centro y en el borde

##### 4.3.1 En el centro

Si consideramos el punto central del interior del solenoide, tenemos que

$$\sin \alpha_2 = -\sin \alpha_1 = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (2a)^2}}$$

y el campo adopta la expresión sencilla

$$\mathbf{B}_c = \frac{\mu_0 n h I \mathbf{u}_z}{\sqrt{h^2 + 4a^2}} = \frac{\mu_0 N I \mathbf{u}_z}{\sqrt{h^2 + 4a^2}}$$

Para este punto es fácil tomar los dos límites indicados anteriormente

- El solenoide se reduce a una espira circular cuando  $N = 1$  y  $h \ll a$ , quedando

$$\mathbf{B}_c \rightarrow \frac{\mu_0 I \mathbf{u}_z}{2a}$$

- El solenoide se puede considerar infinito suponiendo  $n$  finito y  $h \gg a$

$$\mathbf{B} \rightarrow \mu_0 n I \mathbf{u}_z$$

#### 4.3.2 En el borde

En el punto del eje situado justo a la altura del borde del solenoide

$$\sin \alpha_2 = 0 \quad \sin \alpha_1 = -\frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

y el campo vale

$$\mathbf{B}_b = \frac{\mu_0 n h I \mathbf{u}_z}{2\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 N I \mathbf{u}_z}{\sqrt{h^2 + 4a^2}}$$

En los dos límites considerados:

- Si el solenoide se reduce a una espira circular ( $N = 1$  y  $h \ll a$ )

$$\mathbf{B}_b \rightarrow \frac{\mu_0 I \mathbf{u}_z}{2a}$$

que es el mismo valor que en el centro.

- Si el solenoide se puede considerar infinito ( $n$  finito y  $h \gg a$ )

$$\mathbf{B}_b \rightarrow \frac{\mu_0 n I \mathbf{u}_z}{2}$$

que es la mitad del campo en el centro

Más en general, dividiendo el módulo del campo en el borde por el del campo en el centro obtenemos la proporción

$$\frac{B_b}{B_c} = \sqrt{\frac{h^2 + 4a^2}{4h^2 + 4a^2}}$$

que muestra que el campo en el borde es siempre menor que en el centro, siendo ambos coincidentes cuando  $h \rightarrow 0$  y el uno la mitad del otro si  $a \rightarrow 0$ .

Obtenido de "[http://laplace.us.es/wiki/index.php/Campo\\_de\\_un\\_solenoides\\_cil%C3%ADndrico](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Campo_de_un_solenoides_cil%C3%ADndrico)"

Categoría: [Problemas de campo magnético de corrientes estacionarias](#)