

Unidad 7

Líneas de transmisión

25 de junio de 2018

En la unidad anterior se realizó un análisis detallado de los modos de propagación TM y TE en guías de ondas huecas. Una característica importante de estos medios de transmisión, es la existencia de una frecuencia de corte por debajo de la cual una onda electromagnética no puede propagarse. Además, por sus características geométricas, las guías de onda huecas son medios de propagación dispersivos. En esta unidad estudiaremos la propagación de ondas electromagnéticas en el modo TEM en guías de onda de dos conductores. Éstas se conocen comúnmente como **líneas de transmisión**. Como veremos, aunque en estos sistemas también es posible transmitir en los modos TM y TE, el modo dominante de propagación es el TEM ya que su frecuencia de corte se extiende incluso hasta cero (dc). Comenzaremos haciendo un estudio de este modo de propagación y posteriormente describiremos la forma de analizar las líneas de transmisión como elementos de un circuito.

1. Líneas de transmisión de dos conductores

Un **sistema de comunicaciones** permite transmitir y recibir información entre puntos distantes. Los elementos básicos que lo conforman son:

- Una **fente generadora** del mensaje (micrófono de un teléfono, una cámara web, etc).
- Un **transmisor** que adapte dicho mensaje para que pueda ser enviado por un medio determinado (transmisión mediante AM, FM, etc).
- Un **canal de transmisión** inalámbrico (aire, vacío, etc) o alámbrico (guía de ondas hueca, línea de transmisión, fibra óptica, etc).
- Un **receptor** que restaure la información a su forma original, amplificándola y realizando el proceso inverso al efectuado por el transmisor.
- Un **punto de destino** para el mensaje (auricular de un teléfono, pantalla de un televisor, etc).

En particular, una **línea de transmisión** es cualquier sistema formado por conductores, semiconductores o la combinación de ambos, que pueda emplearse para propagar una onda electromagnética. La figura 1 muestra el corte transversal de algunos de estos dispositivos. Un par de hilos paralelos de cobre es la configuración más simple, pero tiene el menor ancho de banda y la menor capacidad de transmitir información. Es por este motivo que se usa frecuentemente para transmitir energía (red domiciliar de 50 Hz) o para aplicaciones en telefonía. Otras líneas de transmisión como las de placas paralelas, microcintas o cables coaxiales, usan también dos

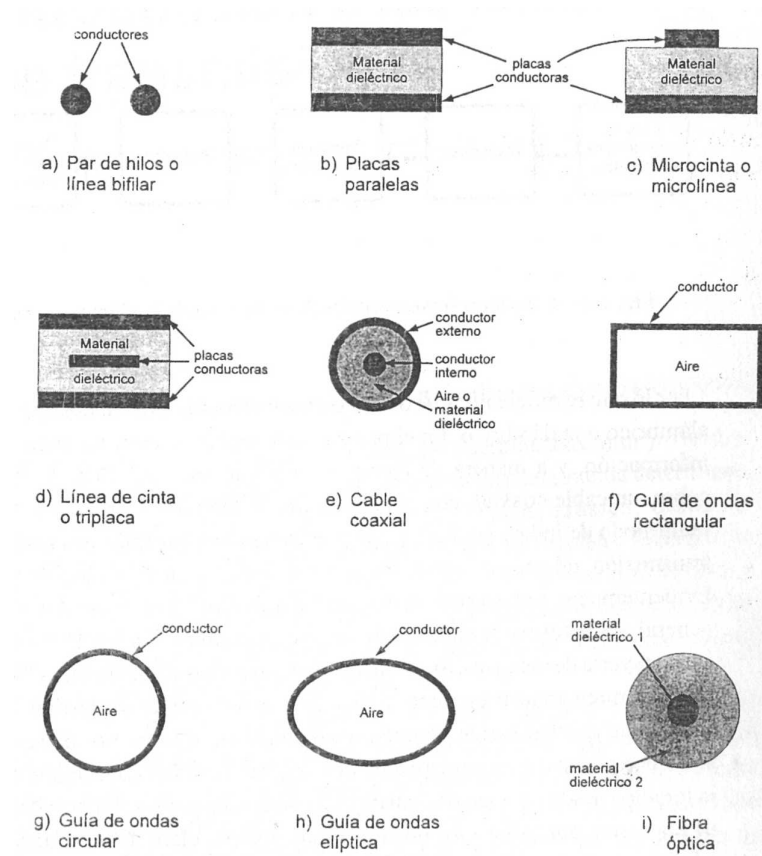


Figura 1: Corte transversal de varios tipos de líneas de transmisión.

conductores con un dieléctrico entre ellos. Por otro lado, hay líneas que emplean tres conductores, como las triplaca, o aquellas que no poseen ningún conductor sino una combinación de materiales dieléctricos, como las fibras ópticas.

Hay diferentes tipos de cable coaxiales. Entre los más comunes están los **cables coaxiales flexibles**, un esquema de los cuales puede observarse en la figura 2. Para aplicaciones de bajas frecuencias se emplea polietileno como dieléctrico, pero a altas frecuencias se emplea teflon. Existen además **cables coaxiales rígidos** en los cuales el conductor central está soportado por placas aislantes y el dieléctrico es algún gas como aire o nitrógeno. Los **cables coaxiales articulados** tienen un dieléctrico que está seccionado para permitirles mayor flexibilidad. Para evitar interferencias se puede usar un **cable coaxial de doble malla**, el cual está blindado por una capa externa conductora adicional que minimiza los efectos de la radiación producida por otros dispositivos.

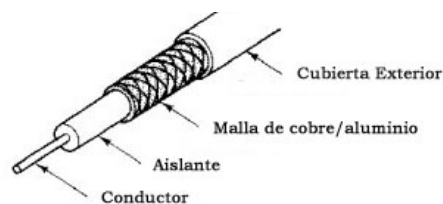


Figura 2: Esquema de una cable coaxial flexible.

2. Propagación de ondas en el modo TEM

2.1. Campos electromagnéticos

Una línea de transmisión de dos conductores tiene simetría cilíndrica, siendo el eje z la dirección en la cual se propagan las ondas electromagnéticas. Consideraremos ahora sólo la propagación de ondas TEM en este tipo de dispositivos. Como para este modo $E_z = H_z = 0$, los campos en coordenadas cilíndricas generalizadas tendrán la forma

$$\mathbf{E}(u_1, u_2, z, t) = \mathbf{a}_1 E_1(u_1, u_2, z, t) + \mathbf{a}_2 E_2(u_1, u_2, z, t) \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, z, t) = \mathbf{a}_1 H_1(u_1, u_2, z, t) + \mathbf{a}_2 H_2(u_1, u_2, z, t). \quad (2)$$

Si los conductores que forman al sistema son perfectos, entonces las condiciones de frontera sobre sus superficies serán

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s \quad (3)$$

$$E_t = 0 \quad (4)$$

$$B_n = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s. \quad (6)$$

Esto implica que el campo eléctrico será normal y el campo magnético será paralelo a la superficie de los cables conductores.

Las formas integrales de las leyes de Ampère y Faraday son

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (7)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (8)$$

Si las integrales de camino se restringen a trayectorias cerradas contenidas en una sección transversal de la línea de transmisión, $l(st)$, entonces debido a que $E_z = H_z = 0$ podemos escribir las leyes anteriores como

$$\oint_{l(st)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (9)$$

$$\oint_{l(st)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (10)$$

La integral (9) tiene la misma forma que la **ley de Ampère para campos estáticos** y la integral (10) expresa que **el campo eléctrico es conservativo**. Hay que remarcar que estos resultados sólo son válidos para una sección transversal. Al igual que en la unidad anterior, supondremos que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell son ondas viajeras que se propagan en la dirección de z , y la dependencia de los campos con esta variable es de la forma $e^{\mp\gamma z}$. En particular, la forma compleja armónica del campo magnético \mathbf{H} se podrá escribir como

$$\hat{\mathbf{H}}(u_1, u_2, z) = \hat{\mathbf{H}}^+(u_1, u_2) e^{-\gamma z} + \hat{\mathbf{H}}^-(u_1, u_2) e^{\gamma z}. \quad (11)$$

De esta manera la integral (9) puede reescribirse como

$$\oint_{l(st)} \hat{\mathbf{H}}^\pm \cdot d\mathbf{l} = \hat{I}_m^\pm. \quad (12)$$

Esto implica que habrá una onda de corriente de la forma

$$\hat{I}(z) = \hat{I}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{I}_m^- e^{\gamma z} \quad (13)$$

$$\hat{I}(z) = \left[\oint_{l(st)} \hat{\mathbf{H}}^+ \cdot d\mathbf{l} \right] e^{-\gamma z} + \left[\oint_{l(st)} \hat{\mathbf{H}}^- \cdot d\mathbf{l} \right] e^{\gamma z}. \quad (14)$$

Por otro lado el campo eléctrico complejo también se puede expresarse como

$$\hat{\mathbf{E}}(u_1, u_2, z) = \hat{\mathbf{E}}^+(u_1, u_2) e^{-\gamma z} + \hat{\mathbf{E}}^-(u_1, u_2) e^{\gamma z}, \quad (15)$$

y la integral (10) escribirse de la siguiente manera

$$\oint_{l(st)} \hat{\mathbf{E}}^\pm \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (16)$$

La ecuación anterior nos dice que, aunque en rigor no estemos en una situación estática, el campo eléctrico bidimensional $\hat{\mathbf{E}}^\pm$ será conservativo. Esto implica que

$$\nabla_T \times \hat{\mathbf{E}}^\pm = 0, \quad (17)$$

donde ∇_T representa un operador nabla restringido a las variables u_1 y u_2 . En el caso particular de coordenadas cartesianas se escribe como

$$\nabla_T \equiv \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z 0. \quad (18)$$

Debido a la propiedad conservativa expresada en la integral (16), este campo eléctrico puede escribirse como el gradiente de un potencial escalar bidimensional complejo

$$\hat{\mathbf{E}}^\pm = -\nabla_T \hat{\Phi}^\pm. \quad (19)$$

Esta última ecuación nos permite calcular la diferencia de potencial entre los dos conductores de la línea de transmisión

$$\hat{\Phi}_1^\pm - \hat{\Phi}_2^\pm = \hat{V}_m^\pm = - \int_{P_2}^{P_1} \hat{\mathbf{E}}^\pm \cdot d\mathbf{l} \Big|_{l(st)}. \quad (20)$$

En la expresión anterior el punto P_2 está situado en la superficie (equipotencial) de uno de los conductores el cual se ha tomado como referencia de potencial cero, P_1 es un punto en la superficie del otro conductor y la integral se ha evaluado a lo largo de una trayectoria arbitraria que sigue un camino transversal que une dichos puntos. Debido a que el campo eléctrico representa una onda viajera que se propaga en la dirección de z , la ecuación (20) indica que el voltaje también será una onda viajera del tipo

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{V}_m^- e^{\gamma z} \quad (21)$$

$$\hat{V}(z) = \left[- \int_{P_2}^{P_1} \hat{\mathbf{E}}^+ \cdot d\mathbf{l} \right]_{l(st)} e^{-\gamma z} + \left[- \int_{P_2}^{P_1} \hat{\mathbf{E}}^- \cdot d\mathbf{l} \right]_{l(st)} e^{\gamma z}. \quad (22)$$

Los resultados anteriores muestran que, para una línea de transmisión, hay una conexión directa entre los campos complejos en el modo TEM y las soluciones de las ecuaciones de Maxwell para un caso bidimensional estático. Veamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un cable coaxial muy largo como el de la figura 3, cuyo radio interior es a y el exterior es b . Para calcular el campo eléctrico $\hat{\mathbf{E}}^\pm$ entre ambos conductores, primero es necesario solucionar

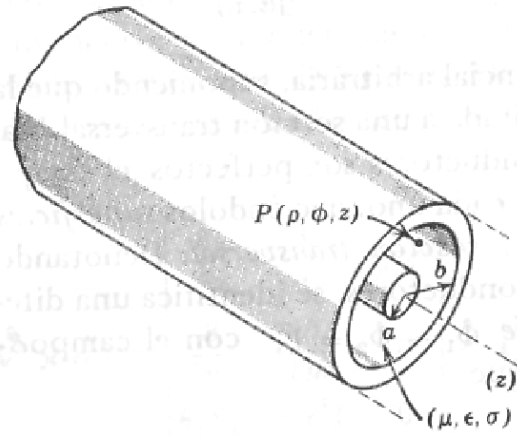


Figura 3: Cable coaxial.

el problema electrostático asociado. En este sentido, supongamos que el conductor externo está puesto a tierra y el interno a una tensión V . El potencial electrostático entre ambos conductores se puede determinar solucionando la ecuación de Laplace, lo cual ya fue realizado en la Unidad 3 (sección 2.6). En coordenadas circulares cilíndricas esta solución es

$$\Phi(\rho) = \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{\rho}. \quad (23)$$

Por la analogía, el potencial complejo será simplemente

$$\hat{\Phi}^{\pm}(\rho) = \frac{\hat{V}_m^{\pm}}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{\rho}. \quad (24)$$

Aplicando (19) se obtiene

$$\hat{\mathbf{E}}^{\pm} = -\nabla_{\text{T}} \hat{\Phi}^{\pm} = -\mathbf{a}_{\rho} \frac{\partial \hat{\Phi}^{\pm}}{\partial \rho}, \quad (25)$$

lo que da

$$\hat{\mathbf{E}}^{\pm} = \mathbf{a}_{\rho} \hat{E}_{\rho}^{\pm} = \mathbf{a}_{\rho} \left(\frac{\hat{V}_m^{\pm}}{\ln \frac{b}{a}} \right) \frac{1}{\rho}. \quad (26)$$

Esta última ecuación vincula la amplitud compleja de la onda de potencial, con la amplitud también compleja del campo eléctrico del modo TEM.

A partir del ejemplo anterior podemos deducir algo muy importante. La ecuación (19) será válida para el modo TEM, sea cual sea la guía de onda (hueca, de dos conductores, etc). Dado un sistema particular, siempre es posible determinar el potencial electrostático si solucionamos la ecuación de Laplace e imponemos luego las condiciones de frontera adecuadas. Si nuestra guía de ondas está formada por dos o más conductores, una diferencia de potencial entre ellos generará un gradiente, es decir, un campo eléctrico en su entorno. De esta forma deducimos que este tipo de sistemas pueden sostener una onda electromagnética en el modo TEM. Por otro lado, si la guía sólo está formada por un conductor como en el caso de las guías de onda huecas, y éste tiene un potencial V en su superficie, el potencial dentro del mismo será constante y su gradiente igual a cero. Es decir, no existirá un campo eléctrico confinado. El razonamiento anterior muestra que no es posible establecer un modo TEM usando una guía de onda formada por un único conductor.

Consideremos ahora las forma complejas armónicas de las leyes de Ampère y Faraday

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = j\omega\hat{\epsilon}\hat{\mathbf{E}} \quad (27)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\hat{\mathbf{H}}, \quad (28)$$

donde se ha supuesto que el medio es lineal y tiene pérdidas (la permitividad es compleja). Para las formas complejas (11) y (15), las expresiones anteriores se pueden reescribir como

$$\nabla' \times \hat{\mathbf{H}}^\pm = j\omega\hat{\epsilon}\hat{\mathbf{E}}^\pm \quad (29)$$

$$\nabla' \times \hat{\mathbf{E}}^\pm = -j\omega\mu\hat{\mathbf{H}}^\pm, \quad (30)$$

donde el operado $\nabla' \times$ es el rotacional modificado (ver Unidad 6). Teniendo en cuenta que para el modo TEM $\hat{E}_z = \hat{H}_z = 0$, las leyes de Ampère y Faraday conducen cada una a tres relaciones escalares

$$\pm\gamma\hat{H}_2^\pm = j\omega\hat{\epsilon}\hat{E}_1^\pm \quad (31)$$

$$\mp\gamma\hat{H}_1^\pm = j\omega\hat{\epsilon}\hat{E}_2^\pm \quad (32)$$

$$\frac{1}{h_1h_2} \left[\frac{\partial(h_2\hat{H}_2^\pm)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1\hat{H}_1^\pm)}{\partial u_2} \right] = 0, \quad (33)$$

y

$$\pm\gamma\hat{E}_2^\pm = -j\omega\mu\hat{H}_1^\pm \quad (34)$$

$$\mp\gamma\hat{E}_1^\pm = -j\omega\mu\hat{H}_2^\pm \quad (35)$$

$$\frac{1}{h_1h_2} \left[\frac{\partial(h_2\hat{E}_2^\pm)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1\hat{E}_1^\pm)}{\partial u_2} \right] = 0, \quad (36)$$

las cuales se han escrito suponiendo coordenadas cilíndricas generalizadas. De las ecuaciones (31) y (35), o de (32) y (34), obtenemos una expresión para la impedancia intrínseca de onda del modo TEM

$$\hat{\eta}_{\text{TEM}} \equiv \pm \frac{\hat{E}_1^\pm}{\hat{H}_2^\pm} = \mp \frac{\hat{E}_2^\pm}{\hat{H}_1^\pm} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\gamma}{j\omega\hat{\epsilon}}. \quad (37)$$

A partir de esta ecuación es posible determinar, en función de los parámetros del medio, una expresión para la constante de propagación

$$\gamma \equiv \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\hat{\epsilon}}, \quad (38)$$

y otra para la impedancia intrínseca de onda

$$\hat{\eta}_{\text{TEM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\hat{\epsilon}}}. \quad (39)$$

Los resultados anteriores para las ondas TEM son idénticos a los obtenidos para ondas planas que se propagan en un medio dieléctrico con pérdidas no limitado, caracterizado por los parámetros μ y $\hat{\epsilon}$. De hecho, todas las ecuaciones deducidas anteriormente para este problema, serán válidas para las ondas TEM que se propagan en una línea de dos conductores. Por ejemplo, si el medio no tiene pérdidas (la permitividad es real), entonces la constante de fase será igual a $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, la impedancia intrínseca será real $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ y la velocidad de fase será la misma que la de la luz en el medio, $v_p = \omega/\beta$.

Finalmente, observemos que a partir de (30) y (37) podemos escribir que

$$\nabla' \times \hat{\mathbf{E}}^\pm = -j\omega\mu\hat{\mathbf{H}}^\pm = -j\omega\mu \left[\mathbf{a}_1 \hat{H}_1^\pm + \mathbf{a}_2 \hat{H}_2^\pm \right] = \pm\gamma \left[\mathbf{a}_1 \hat{E}_2^\pm - \mathbf{a}_2 \hat{E}_1^\pm \right]. \quad (40)$$

Pero, como los tres versores de coordenadas está vinculados por las relaciones $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_2$, entonces

$$\nabla' \times \hat{\mathbf{E}}^\pm = \mp\gamma \mathbf{a}_z \times \left[\mathbf{a}_1 \hat{E}_1^\pm + \mathbf{a}_2 \hat{E}_2^\pm \right] = \mp\gamma \mathbf{a}_z \times \hat{\mathbf{E}}^\pm. \quad (41)$$

Por lo tanto el campo magnético estará vinculado con el eléctrico a través de la siguiente expresión

$$\hat{\mathbf{H}}^\pm = \pm \frac{\gamma}{j\omega\mu} \mathbf{a}_z \times \hat{\mathbf{E}}^\pm = \pm \frac{1}{\hat{\eta}} \mathbf{a}_z \times \hat{\mathbf{E}}^\pm. \quad (42)$$

De forma análoga, a partir de (29) podemos escribir que

$$\hat{\mathbf{E}}^\pm = \mp \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \mathbf{a}_z \times \hat{\mathbf{H}}^\pm = \mp \hat{\eta} \mathbf{a}_z \times \hat{\mathbf{H}}^\pm. \quad (43)$$

Para el problema del cable coaxial, por ejemplo, la ecuación (42) permite determinar el campo magnético. A partir de esta ecuación y (26) obtenemos

$$\hat{\mathbf{H}}^\pm = \pm \frac{1}{\hat{\eta}} \mathbf{a}_z \times \hat{\mathbf{E}}^\pm = \pm \mathbf{a}_\phi \left(\frac{\hat{V}_m^\pm}{\hat{\eta} \ln \frac{b}{a}} \right) \frac{1}{\rho}. \quad (44)$$

2.2. Impedancia característica de línea

En la práctica, el modo TEM en una línea de transmisión se caracteriza por las ondas de voltaje y corriente en lugar de las ondas de campos eléctrico y magnético. La razón es que es más fácil medir una tensión o una corriente que un campo electromagnético. En consecuencia, es útil definir una **impedancia característica de línea** como

$$\hat{Z}_0 = \pm \frac{\hat{V}_m^\pm}{\hat{I}_m^\pm}. \quad (45)$$

Notemos que de acuerdo a las ecuaciones (12) y (42), la amplitud compleja de corriente puede expresarse como

$$\hat{I}_m^\pm = \oint_{l(st)} \hat{\mathbf{H}}^\pm \cdot d\mathbf{l} = \pm \frac{1}{\hat{\eta}} \oint_{l(st)} \left(\mathbf{a}_z \times \hat{\mathbf{E}}^\pm \right) \cdot d\mathbf{l}. \quad (46)$$

A partir de esta expresión podemos ver que \hat{I}_m^\pm es proporcional a la magnitud del campo eléctrico $|\hat{\mathbf{E}}^\pm|$. A su vez, debido a (20), \hat{V}_m^\pm también es proporcional a esta cantidad. Deducimos entonces que las amplitudes de tensión y corriente son proporcionales entre sí, y por lo tanto la impedancia de línea definida en (45) será una constante la cual dependerá sólo de los parámetros del dieléctrico y la frecuencia de la onda. En términos de \hat{Z}_0 podemos reescribir la onda de corriente (13) como

$$\hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_m^+}{\hat{Z}_0} e^{-\gamma z} - \frac{\hat{V}_m^-}{\hat{Z}_0} e^{\gamma z}. \quad (47)$$

Tomemos el ejemplo del cable coaxial y calculemos la impedancia característica de línea. Usando (12) y (44) obtenemos

$$\hat{I}_m^\pm = \oint_{l(st)} \hat{\mathbf{H}}^\pm \cdot d\mathbf{l} = \pm \int_0^{2\pi} \left[\mathbf{a}_\phi \left(\frac{\hat{V}_m^\pm}{\hat{\eta} \ln \frac{b}{a}} \right) \frac{1}{\rho} \right] \cdot \mathbf{a}_\phi \rho d\phi = \pm \frac{2\pi \hat{V}_m^\pm}{\hat{\eta} \ln \frac{b}{a}}, \quad (48)$$

donde hemos seguido una trayectoria de integración circular de radio $a \leq \rho \leq b$. A partir de (45) determinamos que

$$\hat{Z}_0 = \frac{\hat{\eta}}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (49)$$

Si la permitividad del dieléctrico de un cable coaxial es $\epsilon = 2\epsilon_0$ y la permeabilidad es la del espacio vacío, entonces su impedancia intrínseca de onda será $\hat{\eta} = \sqrt{\mu_0/2\epsilon_0} = 120\pi/\sqrt{2} = 266,5 \text{ } [\Omega]$. Luego, si la relación entre las dimensiones de los conductores del cable es $b/a = 3,26$, entonces la impedancia de línea será

$$\hat{Z}_0 = \frac{266,5}{2\pi} \ln 3,26 \approx 50 \text{ } [\Omega]. \quad (50)$$

En el cálculo anterior se han despreciado las pérdidas del dieléctrico.

2.3. Modelo general de un línea de transmisión de dos conductores (opcional)

A partir de las ecuaciones básicas del electromagnetismo, es posible deducir un par de ecuaciones diferenciales acopladas para el voltaje y la corriente en una línea de transmisión de dos conductores, en la cual se propaga una onda en el modo TEM. Estas ecuaciones, en el dominio del tiempo real, son

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -l_e \frac{\partial I}{\partial t} - rI \quad (51)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -c \frac{\partial V}{\partial t} - gV, \quad (52)$$

donde l_e , r , c y g son parámetros distribuidos (por metro) de inductancia externa, resistencia (pérdidas en los conductores), capacitancia y conductancia (pérdidas en el dieléctrico), respectivamente.

La ecuación de línea (51) se puede deducir a partir de la expresión integral de la ley de Faraday

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial \psi_m}{\partial t}. \quad (53)$$

Supongamos primero que los conductores son perfectos. La figura 4 (a) muestra un corte longitudinal de la línea de transmisión, donde se ha trazado una trayectoria de integración rectangular que pasa por los puntos 1, 2, 3 y 4. Para esta trayectoria la circulación del lado izquierdo de (53) se reduce a

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -V + V + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z. \quad (54)$$

Notemos que el aporte de los tramos en la dirección de z es nulo pues el campo eléctrico es perpendicular a la superficie de un conductor perfecto. Por otro lado, teniendo en cuenta que el campo magnético es proporcional a I , el flujo magnético en el lado derecho de (53) se puede escribir como

$$\psi_m = L_e I = (l_e \Delta z) I, \quad (55)$$

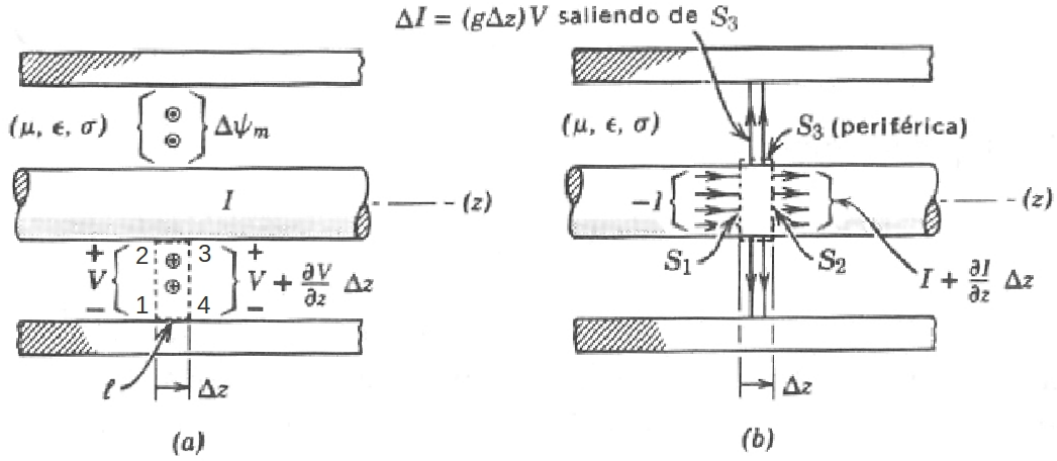


Figura 4: Construcciones geométricas relativas a las ecuaciones de línea. (a) Trayectoria de integración rectangular y (b) superficie Gaussina.

donde L_e es la inductancia externa de un tramo de línea de longitud Δz y l_e es la inductancia externa distribuida. Teniendo en cuenta las ecuaciones (53), (54) y (55) obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -l_e \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (56)$$

Esta es una ecuación de línea válida para conductores perfecto. No obstante, para obtener (51) debemos ir un paso más allá y considerar las pérdidas en los conductores. Entre otras cosas, una conductividad finita provoca que el campo eléctrico en la superficie de los conductores tenga una pequeña componente en la dirección de z (el modo TEM se verá levemente perturbado). De esta forma la integral de camino (54) tendrá dos términos adicionales de la forma ΔV_{23} y ΔV_{41} . La contribución de ambos se puede escribir como

$$\Delta V_{23} + \Delta V_{41} = RI = (r\Delta z)I, \quad (57)$$

donde r es la resistencia distribuida con la cual se toma en cuenta las pérdidas debidas a los conductores. Teniendo en cuenta este nuevo término, la expresión (56) queda

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial z} = -l_e \frac{\partial I}{\partial t} - rI}, \quad (58)$$

la cual es idéntica a la ecuación de línea (51).

Para obtener la ecuación (52) partimos de la relación de conservación de la carga

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (59)$$

La figura 4 (b) muestra para la misma sección transversal Δz , una superficie Gaussina S que está formada por S_1 , S_2 y S_3 . Como la carga en un conductor perfecto reside en su superficie, entonces la Δq encerrada por S se encuentra localizada sobre S_3 . Luego, debido a que el campo eléctrico en una sección transversal de la línea satisface las ecuaciones para el caso estático, esta carga estará relacionada con el voltaje por

$$\Delta q = CV = (c\Delta z)V, \quad (60)$$

donde C es la capacidad de un tramo Δz de la línea y c es la capacitancia distribuida. De esta forma el lado derecho de (59) queda

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = -c \frac{\partial V}{\partial t} \Delta z. \quad (61)$$

Por otro lado, el término del lado izquierdo de (59) representa la corriente neta que fluye a través de S . Suponiendo que el flujo de corriente hacia la derecha es positivo, entonces las contribuciones de S_1 , S_2 y S_3 a la integral son

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -I + I + \frac{\partial I}{\partial z} \Delta z + GV = \frac{\partial I}{\partial z} \Delta z + (g\Delta z)V. \quad (62)$$

El último término de esta ecuación representa las pérdidas por conducción en el dieléctrico: si G es la conductancia de una sección Δz de material y g su conductancia distribuida, entonces la corriente que fluirá entre los dos conductores estará dada por $I_{\text{pérdidas}} = GV = (g\Delta z)V$. Igualando las dos ecuaciones anteriores se obtiene (52)

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial z} = -c \frac{\partial V}{\partial t} - gV}. \quad (63)$$

Las ecuaciones (51) y (52) se pueden utilizar para deducir un modelo de elementos agrupados $L = l_e \Delta z$, $R = r \Delta z$, $C = c \Delta z$ y $G = g \Delta z$, los cuales forman un circuito que tiene las mismas características de tensión y corriente que un tramo de longitud Δz de una línea de dos conductores. Por un lado, podemos ver que la ecuación (51) en su forma discreta

$$\Delta V = (-l_e \frac{\partial I}{\partial t} - rI) \Delta z = -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI, \quad (64)$$

representa la caída de tensión entre dos puntos de la línea que están separados una distancia Δz , entre los cuales hay una inductancia L en serie con una resistencia R . Por otro lado, la ecuación (52) en forma discreta es

$$\Delta I = (-c \frac{\partial V}{\partial t} - gV) \Delta z = -C \frac{\partial V}{\partial t} - GV. \quad (65)$$

Esta expresión representa la variación de corriente en el tramo Δz , la cual se debe tanto a la pérdida por conducción a través de la conductancia G , como a la acumulación de carga en dicho tramo. Usando estas analogías, es posible construir un modelo de línea de transmisión como el mostrado en la figura 5. Una sección Δz estará representada por el circuito entre los puntos **a** y **b**. Para obtener una descripción adecuada de una línea de transmisión real, es necesario emplear no menos de 20 de estas secciones por longitud de onda.

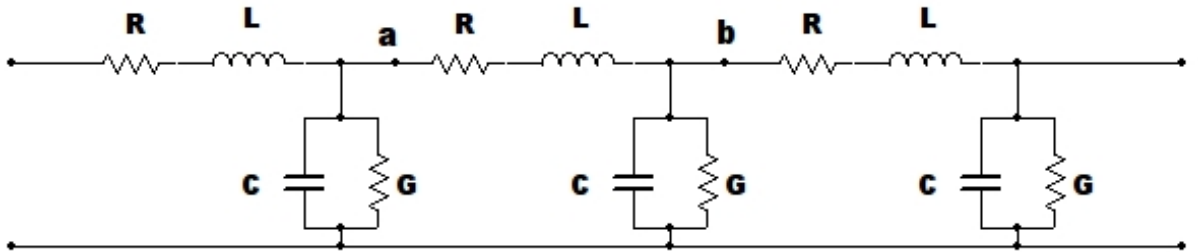


Figura 5: Modelo de una línea de transmisión.

2.4. Ecuación de onda (opcional)

A partir de las ecuaciones de línea (51) y (52) se pueden obtener un par de ecuaciones de onda no homogéneas para el voltaje y la corriente. Combinando la derivada de la ecuación (51) respecto a z , la ecuación (52) y también su derivada temporal, obtenemos una expresión solamente en término de V

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - l_e c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - (rc + gl_e) \frac{\partial V}{\partial t} - rgV = 0}. \quad (66)$$

Por otro lado, con la derivada de la ecuación (52) respecto a z , la ecuación (51) y su derivada temporal, obtenemos otra expresión pero esta vez solamente en término de I

$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - l_e c \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - (rc + gl_e) \frac{\partial I}{\partial t} - rgI = 0}. \quad (67)$$

A continuación analizaremos estas ecuaciones de onda.

El caso más simple es cuando no hay pérdidas ni en el dieléctrico ($g = 0$) ni en los conductores ($r = 0$). Entonces, las expresiones (66) y (67) se convierten en un par de ecuaciones de onda homogéneas

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - l_e c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - l_e c \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0, \quad (69)$$

las cuales representan la propagación de ondas de tensión y corriente con una velocidad dada por $v_p = 1/\sqrt{l_e c}$.

En el caso general (incluyendo las pérdidas), es fácil demostrar que las formas armónicas complejas de las ecuaciones de onda (66) y (67) son

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial z^2} - \hat{z} \hat{y} \hat{V} = 0 \quad (70)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{I}}{\partial z^2} - \hat{z} \hat{y} \hat{I} = 0, \quad (71)$$

donde hemos definido la impedancia $\hat{z} = r + j\omega l_e$ y la admitancia $\hat{y} = g + j\omega c$. Estas ecuaciones tienen las soluciones propuestas anteriormente para el voltaje y la corriente

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{V}_m^- e^{\gamma z} \quad (72)$$

$$\hat{I}(z) = \hat{I}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{I}_m^- e^{\gamma z}. \quad (73)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de onda (70) y (71), podemos demostrar que la constante de propagación es igual a

$$\boxed{\gamma \equiv \alpha + j\beta = \sqrt{\hat{z}\hat{y}} = \sqrt{(r + j\omega l_e)(g + j\omega c)}}. \quad (74)$$

Con un poco más de álgebra, también es posible probar que la constante de atenuación es

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(rg - \omega^2 l_e c) + \frac{1}{2}[(r^2 + \omega^2 l_e^2)(g^2 + \omega^2 c^2)]^{1/2}}. \quad (75)$$

y el factor de fase está dado por

$$\beta = \sqrt{-\frac{1}{2}(rg - \omega^2 l_e c) + \frac{1}{2}[(r^2 + \omega^2 l_e^2)(g^2 + \omega^2 c^2)]^{1/2}}. \quad (76)$$

De acuerdo al valor de los parámetros distribuidos podemos tener diferentes tipos de línea:

a) Si no hay pérdidas ($r = g = 0$) o estas son despreciables, entonces

$$\alpha = 0 \quad (77)$$

$$\beta = \omega \sqrt{l_e c}. \quad (78)$$

Es decir, no habrá atenuación.

b) Si $r \ll \omega l_e$ y el dieléctrico es aire ($g \approx 0$) tenemos que

$$\alpha \approx \frac{r}{2} \sqrt{\frac{c}{l_e}} \quad (79)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{l_e c}. \quad (80)$$

Vemos que el factor de fase es casi el mismo que para la línea sin pérdidas, pero ahora tenemos algo de atenuación.

c) Si $r \ll \omega l_e$ y $g \ll \omega c$

$$\alpha \approx \frac{r}{2} \sqrt{\frac{c}{l_e}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{l_e}{c}} \quad (81)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{l_e c}, \quad (82)$$

donde nuevamente podemos apreciar que el factor de fase es similar al de la línea sin pérdidas.

d) Para una **línea no distorsionante** para la que se cumple que

$$\frac{r}{l_e} = \frac{g}{c}, \quad (83)$$

tenemos las expresiones exactas

$$\alpha = r \sqrt{\frac{c}{l_e}} \quad (84)$$

$$\beta = \omega \sqrt{l_e c}. \quad (85)$$

Esta línea tiene exactamente el mismo factor de fase de la línea sin pérdidas.

Aunque en los casos b) y c) el factor de fase es similar al de la línea sin pérdidas, debemos subrayar que estas relaciones son sólo aproximadas. Por ejemplo, en el caso c) un desarrollo más completo conduce a

$$\beta \approx \omega \sqrt{l_e c} \left[1 + \left(\frac{r}{2\omega l_e} - \frac{g}{2\omega c} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (86)$$

Para este caso (para el cual $r \ll \omega l_e$ y $g \ll \omega c$) tenemos que la velocidad de fase $v_p = \omega/\beta$ será una función de la frecuencia. Una señal arbitraria (formada por muchos armónicos) se distorsionaría al propagarse por una línea de este tipo. Por otro lado, no habrá distorsión si la línea es sin pérdidas o si es no distorsionante, ya que tendremos que $v_p = 1/\sqrt{l_e c}$. En dichas líneas la velocidad de grupo, $v_g = d\omega/d\beta$, será igual a la de fase.

Notemos además que las ecuaciones de línea (51) y (52) en forma compleja pueden escribirse como

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial z} = -\hat{z} \hat{I} \quad (87)$$

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial z} = -\hat{y} \hat{V}. \quad (88)$$

Derivando las soluciones (72) y (73) respecto a z y reemplazando en las ecuaciones anteriores podemos ver que

$$\hat{I}_m^\pm = \pm \frac{\hat{\gamma}}{\hat{z}} \hat{V}_m^\pm = \pm \frac{\hat{y}}{\hat{\gamma}} \hat{V}_m^\pm = \pm \sqrt{\frac{\hat{y}}{\hat{z}}} \hat{V}_m^\pm. \quad (89)$$

Entonces la impedancia característica de línea (45) será

$$\hat{Z}_0 = \pm \frac{\hat{V}_m^\pm}{\hat{I}_m^\pm} = \sqrt{\frac{\hat{z}}{\hat{y}}} = \sqrt{\frac{r + j\omega l_e}{g + j\omega c}}. \quad (90)$$

3. Análisis de líneas de transmisión

3.1. Cálculo de voltaje y corriente en líneas con reflexiones

Como hemos visto anteriormente, las formas armónicas complejas de las ondas de voltaje y corriente en una línea de transmisión cuya impedancia característica de línea es \hat{Z}_0 , son

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{V}_m^- e^{\gamma z} \quad (91)$$

$$\hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_m^+}{\hat{Z}_0} e^{-\gamma z} - \frac{\hat{V}_m^-}{\hat{Z}_0} e^{\gamma z}. \quad (92)$$

Notemos que las ecuaciones (91) y (92) son análogas, respectivamente, a los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana (modo TEM) que se propaga en un sistema de capas múltiples, y que \hat{Z}_0 cumple el papel de la impedancia intrínseca de onda $\hat{\eta}$ (ver Unidad 5). Esta analogía nos será útil para analizar la transmisión de señales en sistemas de líneas conectadas en cascada como muestra la figura 6.

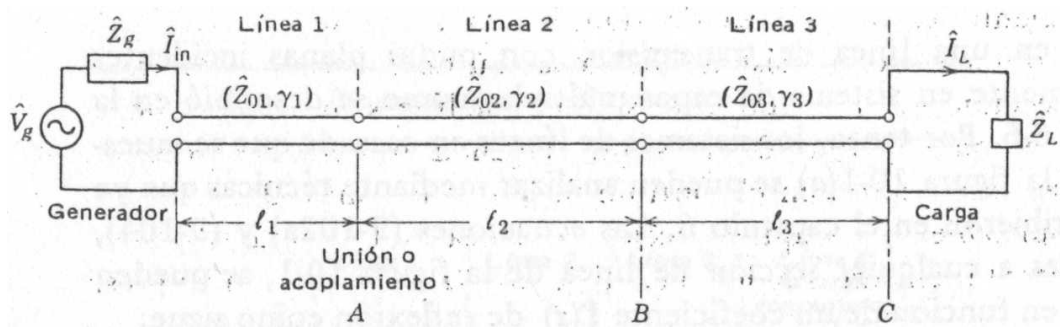


Figura 6: Esquema de una conexión entre un generador y una carga, usando líneas de transmisión con diferentes impedancias.

Siguiendo la analogía planteada anteriormente, definimos un **coeficiente de reflexión** como

$$\hat{\Gamma}(z) \equiv \frac{\hat{V}_m^-}{\hat{V}_m^+} e^{2\gamma z}. \quad (93)$$

Éste nos permite escribir las ondas de voltaje y corriente como

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_m^+ e^{-\gamma z} [1 + \hat{\Gamma}(z)] \quad (94)$$

$$\hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_m^+}{\hat{Z}_0} e^{-\gamma z} [1 - \hat{\Gamma}(z)]. \quad (95)$$

Una **impedancia de línea** (análoga a la impedancia de campo) se puede definir de la siguiente manera

$$\hat{Z}(z) \equiv \frac{\hat{V}(z)}{\hat{I}(z)} = \hat{Z}_0 \frac{1 + \hat{\Gamma}(z)}{1 - \hat{\Gamma}(z)}. \quad (96)$$

De esta forma, el coeficiente de reflexión como función de esta impedancia es

$$\hat{\Gamma}(z) = \frac{\hat{Z}(z) - \hat{Z}_0}{\hat{Z}(z) + \hat{Z}_0}. \quad (97)$$

Por otro lado, podemos demostrar a partir de (93), que los coeficientes de reflexión para dos puntos z y z' dentro de la misma línea de transmisión están relacionados por

$$\hat{\Gamma}(z') = \hat{\Gamma}(z) e^{2\gamma(z'-z)}. \quad (98)$$

Finalmente, la analogía queda completa si notamos que en la unión de las líneas (análoga a una interacción entre dos medios) la impedancia de línea $\hat{Z}(z)$ es continua (pues las ondas de voltaje y corriente son continuas), mientras que el coeficiente de reflexión $\hat{\Gamma}(z)$ es discontinuo (ya que en general la impedancia característica \hat{Z}_0 es diferente para cada línea de transmisión). El ejemplo que sigue, nos permitirá entender cómo usar las expresiones anteriores para calcular las tensiones y corrientes en un sistema particular.

Problema. Un transmisor tiene una impedancia interna de $50 \text{ } [\Omega]$, opera a 20 [MHz] y desarrolla una onda de tensión de amplitud $\hat{V}_g = 100 e^{j0^\circ} \text{ [V]}$. Este instrumento se conecta a una antena cuya impedancia, a esa frecuencia de trabajo, es $\hat{Z}_L = 36 + j20 \text{ } [\Omega]$. Como muestra la figura 7 (a), la conexión se realiza a través de una línea de transmisión de dos conductores de longitud $l = 6,33 \text{ [m]}$, impedancia característica $\hat{Z}_0 = 50 \text{ } [\Omega]$, y parámetros $\alpha = 1,97 \times 10^{-3} \text{ [m}^{-1}\text{]}$ y $\beta = 0,595 \text{ [m}^{-1}\text{]}$ (estos dos últimos valores calculados a 20 [MHz]). Se pide calcular la impedancia de entrada de la línea cuando tiene en su extremo conectada la carga y la potencia total entregada por el transmisor en esta configuración. También, se requiere calcular estos mismos valores suponiendo que la carga tiene una impedancia de $50 \text{ } [\Omega]$.

Para resolver el problema procedemos como sigue:

- La longitud de onda en la línea será $\lambda = 2\pi/\beta = 10,55 \text{ [m]}$. En unidades de λ , la línea tiene una longitud de $l/\lambda = 0,6$.
- Calculamos ahora la impedancia de entrada a la línea \hat{Z}_{in} cuando está conectada la carga. Eligiendo el origen $z = 0$ en la carga [ver figura 7 (a)], a partir de la propiedad de

continuidad de la impedancia deducimos que $\hat{Z}(0) = \hat{Z}_L$. Entonces, empleando la ecuación (97), obtenemos el coeficiente de reflexión en este punto

$$\hat{\Gamma}(0) = \frac{\hat{Z}(0) - \hat{Z}_0}{\hat{Z}(0) + \hat{Z}_0} = \frac{\hat{Z}_L - \hat{Z}_0}{\hat{Z}_L + \hat{Z}_0} = \frac{(36 + j20) - 50}{(36 + j20) + 50} = 0,2765 e^{j111,9^\circ}. \quad (99)$$

Este coeficiente en el punto de conexión de la línea con el generador (punto A en la figura) el cual se encuentra en $z = -l$, puede determinarse usando (98)

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}(-l) &= \hat{\Gamma}(0) e^{2(\alpha + j\beta)(-l-0)} \\ &= (0,2765 e^{j111,9^\circ}) e^{-2(1,97 \times 10^{-3})6,33} e^{-2j(2\pi/\lambda)0,6\lambda} \\ &= 0,2765 e^{j111,9^\circ} e^{-0,0253 - j72^\circ} = 0,212 + j0,177. \end{aligned} \quad (100)$$

Entonces, empleando la ecuación (96), la impedancia de entrada será

$$\hat{Z}_{in} = \hat{Z}(-l) = \hat{Z}_0 \frac{1 + \hat{\Gamma}(-l)}{1 - \hat{\Gamma}(-l)} \quad (101)$$

$$= 50 \frac{1,212 + j0,177}{0,788 - j0,177} = 75,8 e^{j21^\circ} = 70,5 + j28 [\Omega]. \quad (102)$$

- c) Determinamos ahora la potencia que entrega el generador. Para ello, calculamos primero la corriente de entrada \hat{I}_{in} en el punto A. De acuerdo al esquema mostrado en la figura

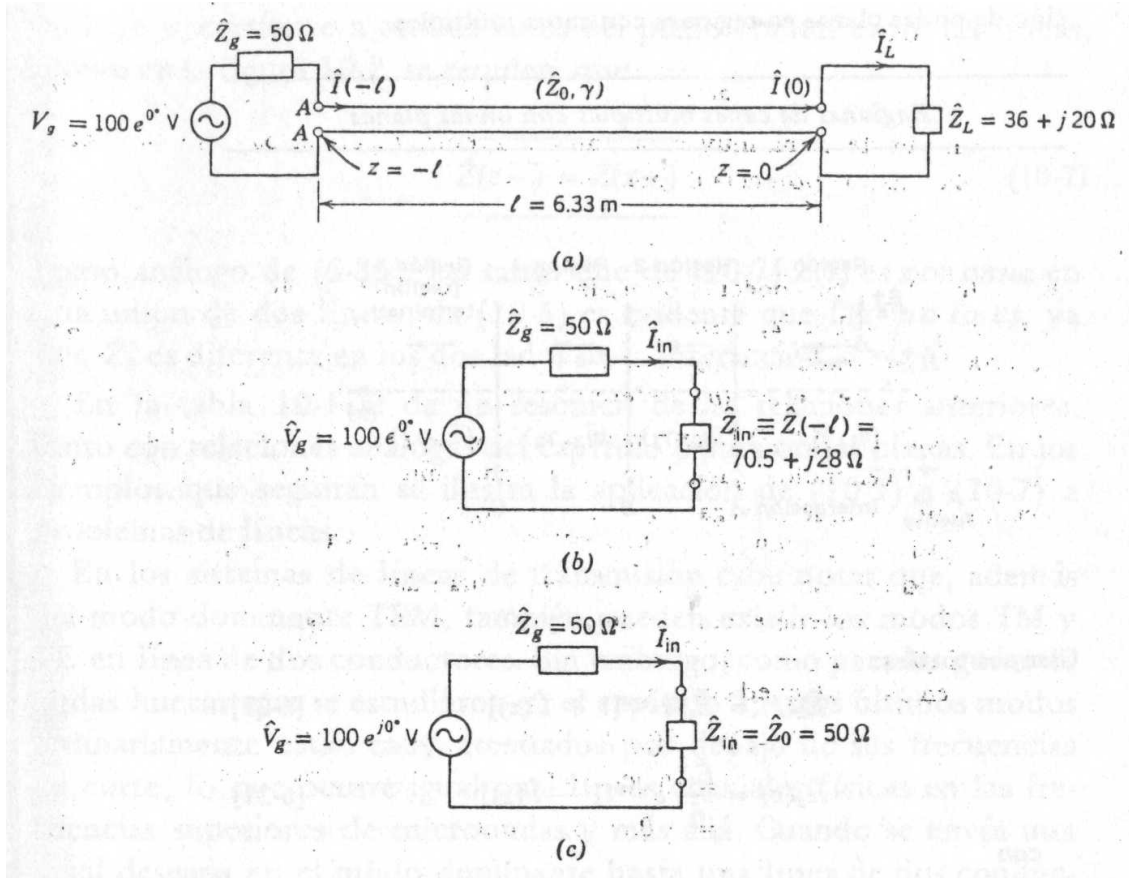


Figura 7: Esquema del problema resuelto.

7(b) tenemos que

$$\hat{I}_{\text{in}} = \hat{I}(-l) = \frac{\hat{V}_g}{\hat{Z}_g + \hat{Z}_{\text{in}}} = \frac{100}{50 + (70,5 + j28)} = 0,808 e^{-j13,1^\circ} [\text{A}]. \quad (103)$$

La potencia promedio de entrada se puede calcular como (ver ecuación A-17 del apéndice A de la referencia [1])

$$P_{\text{pro,in}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\hat{V}_{\text{in}} \hat{I}_{\text{in}}^*] = \frac{1}{2} \text{Re} [\hat{Z}_{\text{in}} \hat{I}_{\text{in}} \hat{I}_{\text{in}}^*] \quad (104)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} [75,8 e^{j21^\circ} (0,808)^2] = 23 [\text{W}]. \quad (105)$$

- d) Para determinar la potencia que se entrega a la carga, primero calculamos la corriente en $z = 0$. A partir de la ecuación (95), notemos que es posible vincular las corrientes en dos puntos diferentes de una misma línea

$$\hat{I}(z') = \hat{I}(z) e^{-\gamma(z'-z)} \left[\frac{1 - \hat{\Gamma}(z')}{1 - \hat{\Gamma}(z)} \right]. \quad (106)$$

De aquí tenemos que

$$\hat{I}_L = \hat{I}(0) = \hat{I}(-l) e^{-\gamma l} \left[\frac{1 - \hat{\Gamma}(0)}{1 - \hat{\Gamma}(-l)} \right] \quad (107)$$

$$= 0,808 e^{-j13,1^\circ} e^{-(1,97 \times 10^{-3})6,33} e^{-j(2\pi/\lambda)0,6\lambda} \left[\frac{1 - (-0,103 + j0,2565)}{1 - (0,212 + j0,177)} \right] \quad (108)$$

$$= 1,133 e^{-j228,5^\circ} [\text{A}]. \quad (109)$$

Entonces la potencia promedio entregada a la carga será

$$P_{\text{pro,L}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\hat{Z}_L \hat{I}_L \hat{I}_L^*] \quad (110)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} [41,2 e^{j29^\circ} (1,133)^2] = 23 [\text{W}]. \quad (111)$$

- e) Si $\hat{Z}_L = \hat{Z}_0 = 50 [\Omega]$, entonces no hay reflexiones $\hat{\Gamma}(0) = \hat{\Gamma}(-l) = 0$ y $\hat{Z}_{\text{in}} = 50 [\Omega]$. El circuito equivalente es mostrado en la figura 7 (c). Es fácil ver que $\hat{I}_{\text{in}} = 1 [\text{A}]$ y que la potencia disipada en el generador es la misma que en la carga, $P_{\text{pro,in}} = P_{\text{pro,L}} = 25 [\text{W}]$. Es decir, la mitad de la potencia es transferida a la carga.

3.2. Análisis de líneas de transmisión usando la carta de Smith

A partir del cociente entre la impedancia de línea (96) y la impedancia característica de línea, podemos definir una **impedancia normalizada** como

$$\boxed{\frac{\hat{Z}(z)}{\hat{Z}_0} \equiv \hat{z}(z) = \frac{1 + \hat{\Gamma}(z)}{1 - \hat{\Gamma}(z)}}. \quad (112)$$

Entonces el coeficiente de reflexión (97) como función de esta nueva cantidad se puede escribir como

$$\boxed{\hat{\Gamma}(z) = \frac{\hat{z}(z) - 1}{\hat{z}(z) + 1}}. \quad (113)$$

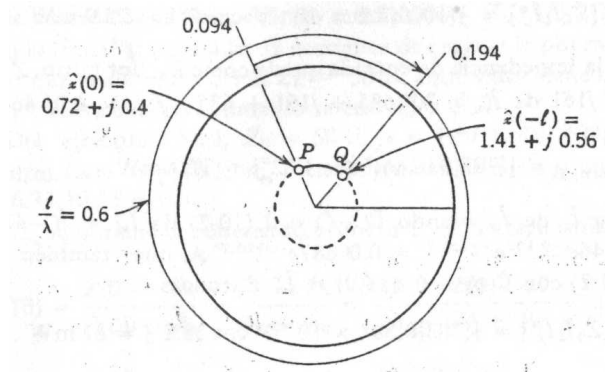


Figura 8: Cálculo de la impedancia de entrada usando la carta de Smith

Las dos ecuaciones anteriores son las transformaciones que dan vida a la **carta de Smith**, la cual fue introducida en la Unidad 5. Por lo tanto, esta construcción puede ser utilizado para resolver problemas de acoplamientos de líneas de transmisión.

Como ejemplo, calcularemos la impedancia de entrada a la línea \hat{Z}_{in} del problema planteado en la sección anterior, cuando está conectada la carga \hat{Z}_L . Comenzando en la carga vemos que la impedancia normalizada es

$$\hat{z}(0) = \frac{\hat{Z}(0)}{\hat{Z}_0} = \frac{36 + j20}{50} = 0,72 + j0,40 \quad (114)$$

la cual corresponde al punto P en la carta de Smith de la figura 8. Si nos acercamos $0,6\lambda$ hacia la fuente (rotación horaria) nos situamos en el punto Q, el cual tiene una impedancia normalizada de $\hat{z}(-l) = 1,41 + j0,56$. Al desnormalizar se obtiene

$$\hat{Z}(-l) = \hat{z}(-l)\hat{Z}_0 = (1,41 + j0,56)50 = 75,8 e^{j21^\circ}, \quad (115)$$

resultado que obtuvimos anteriormente. Por otro lado, los valores de los coeficientes de reflexión en P y Q se pueden leer directamente en la carta de Smith y son

$$\hat{\Gamma}(0) = 0,28 e^{j112^\circ} \quad \text{y} \quad \hat{\Gamma}(-l) = 0,28 e^{j39,5^\circ}. \quad (116)$$

Si dos líneas de transmisión de impedancias \hat{Z}_1 y \hat{Z}_2 están conectadas en paralelo, la impedancia equivalente es igual a

$$\hat{Z}_{||} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}. \quad (117)$$

Usando las admitancias de cada línea, $\hat{Y}_1 = 1/\hat{Z}_1$ y $\hat{Y}_2 = 1/\hat{Z}_2$, la admitancia del conjunto será

$$\hat{Y}_{||} = \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2. \quad (118)$$

Para analizar un sistema de este tipo es útil usar una propiedad particular de la carta de Smith. Esta se obtiene observando que a partir de cualquier impedancia normalizada $\hat{z} = r + jx$ (un punto en la carta de Smith), es posible calcular la admitancia correspondiente $\hat{y} = g + jl$, realizando una rotación de 180° . Esta propiedad es fácil de corroborar considerando que la impedancia está relacionada con el coeficiente de reflexión $\hat{\Gamma} = \Gamma_r + j\Gamma_i$ por

$$\hat{z} = \frac{1 + \hat{\Gamma}(z)}{1 - \hat{\Gamma}(z)} \quad (119)$$

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i}. \quad (120)$$

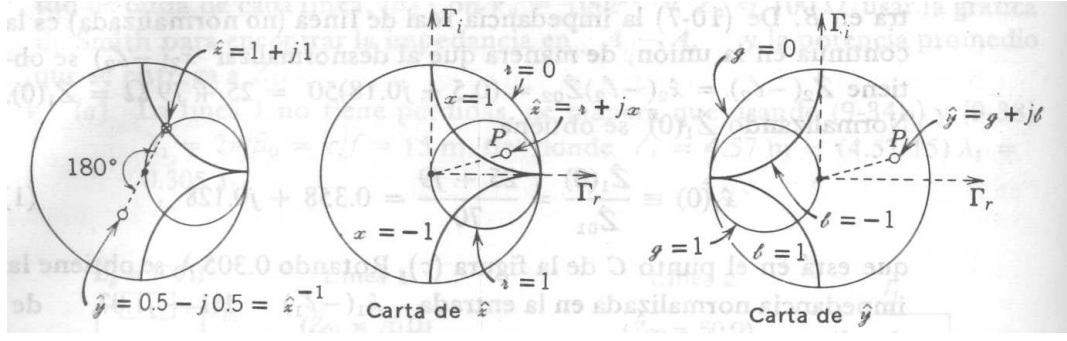


Figura 9: Construcción de la carta de Smith de admitancia.

A partir de esta expresión podemos ver que la admitancia normalizada correspondiente será

$$\hat{y} = g + jl = \frac{1 - \hat{\Gamma}(z)}{1 + \hat{\Gamma}(z)} = \frac{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i}{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i} = \frac{1 + (-\Gamma_r) + j(-\Gamma_i)}{1 - (-\Gamma_r) - j(-\Gamma_i)}. \quad (121)$$

Por lo tanto, las coordenadas de \hat{y} en el plano complejo del coeficiente de reflexión son $(-\Gamma_r)$ y $(-\Gamma_i)$, las cuales se obtienen a partir de un giro de 180° . En la figura 9 vemos un ejemplo en el que a partir de una impedancia normalizada $\hat{z} = 1 + j1$, rotando 180° obtenemos su admitancia $\hat{y} = 0,5 - j0,5$.

A partir de esta propiedad se define una nueva versión de la carta de Smith, en la cual para cada valor del coeficiente de reflexión (caracterizado por el punto P en el lado derecho de la figura 9), se puede obtener el valor de la admitancia. Es fácil mostrar que en la carta de Smith de impedancia, en este mismo punto P se puede leer la impedancia correspondiente.

3.3. Expresiones analíticas para la impedancia de línea

Consideremos una línea de longitud l cuya impedancia característica es \hat{Z}_0 , la cual tiene conectada en un extremo una impedancia de carga \hat{Z}_L . La impedancia de entrada de este conjunto se puede calcular usando (96)

$$\hat{Z}_{in} = \hat{Z}(-l) = \hat{Z}_0 \frac{1 + \hat{\Gamma}(-l)}{1 - \hat{\Gamma}(-l)}. \quad (122)$$

Considerando que el coeficiente de reflexión en $z = -l$ es igual a

$$\hat{\Gamma}(-l) = \hat{\Gamma}(0) e^{-2\gamma l}, \quad (123)$$

y en $z = 0$ es

$$\hat{\Gamma}(0) = \frac{\hat{Z}_L - \hat{Z}_0}{\hat{Z}_L + \hat{Z}_0}, \quad (124)$$

entonces sustituyendo estas ecuaciones en (122) obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{in} &= \hat{Z}_0 \frac{1 + \frac{\hat{Z}_L - \hat{Z}_0}{\hat{Z}_L + \hat{Z}_0} e^{-2\gamma l}}{1 - \frac{\hat{Z}_L - \hat{Z}_0}{\hat{Z}_L + \hat{Z}_0} e^{-2\gamma l}} \\ \hat{Z}_{in} &= \hat{Z}_0 \frac{(\hat{Z}_L + \hat{Z}_0) e^{\gamma l} + (\hat{Z}_L - \hat{Z}_0) e^{-\gamma l}}{(\hat{Z}_L + \hat{Z}_0) e^{\gamma l} - (\hat{Z}_L - \hat{Z}_0) e^{-\gamma l}} \\ \hat{Z}_{in} &= \hat{Z}_0 \frac{\hat{Z}_L \cosh \gamma l + \hat{Z}_0 \sinh \gamma l}{\hat{Z}_0 \cosh \gamma l + \hat{Z}_L \sinh \gamma l}. \end{aligned} \quad (125)$$

En especial, para una línea sin pérdidas, tenemos que la impedancia característica es real. Además, como $\alpha = 0$ entonces $\gamma = j\beta$. La impedancia de entrada (125) para este caso quedará

$$\hat{Z}_{in} = Z_0 \frac{\hat{Z}_L \cos \beta l + j Z_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j \hat{Z}_L \sin \beta l}. \quad (126)$$

Hay dos casos particulares de gran importancia que nos serán de utilidad en la próxima sección. En primer lugar, si la carga está en cortocircuito $\hat{Z}_L = 0$, entonces la impedancia de entrada para la línea sin pérdidas (126) será igual a

$$\hat{Z}_{in,cc} = j Z_0 \tan \beta l. \quad (127)$$

Por otro lado, si la carga está abierta $\hat{Z}_L \rightarrow \infty$, entonces obtenemos

$$\hat{Z}_{in,ca} = -j Z_0 \cot \beta l. \quad (128)$$

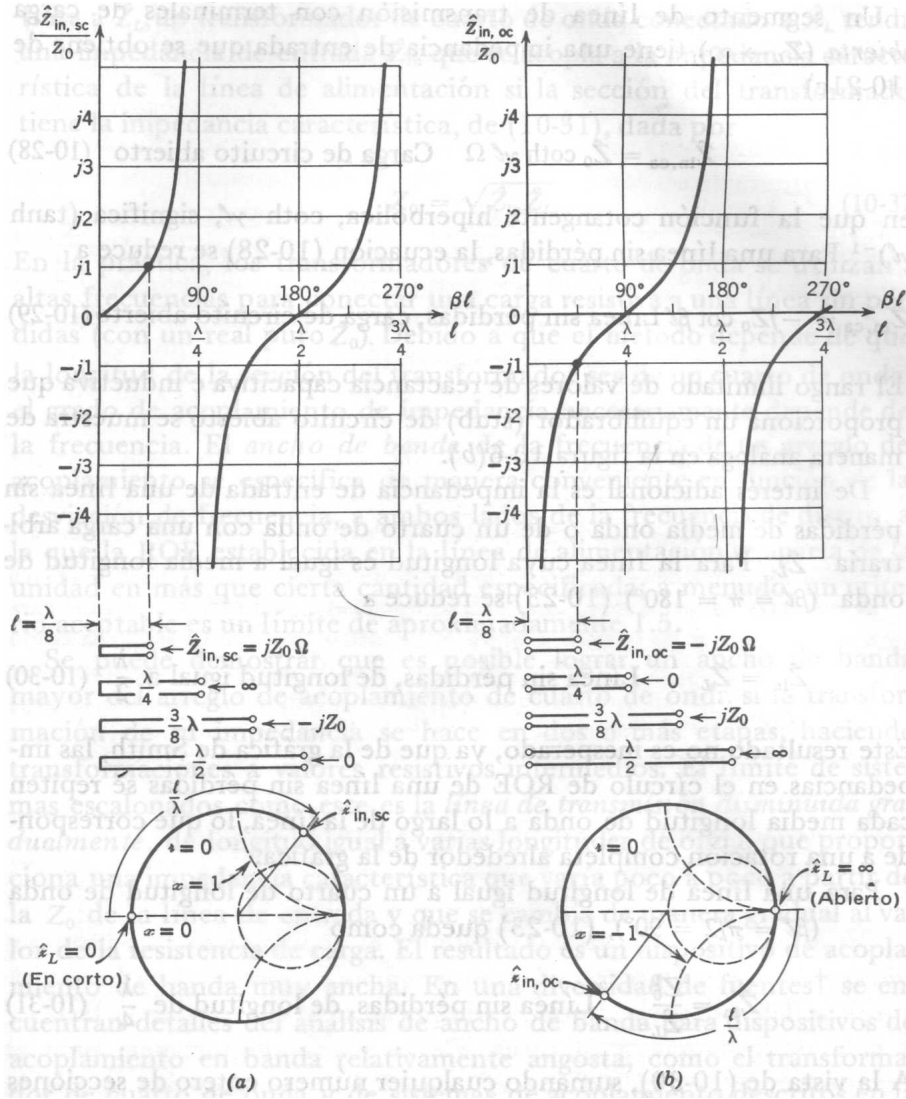


Figura 10: Gráfica de la impedancia de entrada de una línea sin pérdidas terminada en (a) un corto circuito y (b) un circuito abierto.

La figura 10 muestra el comportamiento de estas dos impedancias en función de l . Hay que notar que tanto (127) como (128) son impedancias imaginarias puras (reactancias inductivas o capacitivas). Por otro lado, debido a que estas ecuaciones y en general (126) son periódicas, la impedancia de entrada es igual a la de la carga si l es un múltiplo entero de $\lambda/2$. Es decir, $\hat{Z}_{in} = \hat{Z}_L$ si $l = n\lambda/2$, donde n es un número natural. Esta propiedad se puede corroborar observando la figura 10.

Notemos además que, si una línea sin pérdidas termina en una carga \hat{Z}_L y tiene una longitud de un cuarto de onda, $l = \lambda/4$, entonces

$$\hat{Z}_{in} = \frac{Z_0^2}{\hat{Z}_L}. \quad (129)$$

Con la ayuda de esta relación podemos realizar un **acoplamiento de impedancias** como sigue. Consideremos que tenemos una línea sin pérdidas cuya impedancia característica es Z_1 y tiene en su extremo una carga real pura Z_L . Para adaptar estas impedancias (en general $Z_L \neq Z_1$) introducimos entre ellas un acoplador, el cual es simplemente un nuevo tramo de línea sin pérdidas, cuya impedancia característica es Z_0 y su longitud es $l = \lambda/4$. La figura 11 muestra un esquema de este sistema. Si se eligen adecuadamente los materiales (dieléctrico) o la geometría de este acoplador, es posible lograr que se cumpla que $Z_{in} = Z_1$, donde Z_{in} representa la impedancia de entrada del acoplador con la carga en su extremo. Para que esto sea posible, a partir de (129) podemos deducir que debe cumplirse que

$$Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_L}. \quad (130)$$

Es decir, la impedancia característica del acoplador es la media geométrica entre las impedancias de la carga y la línea de transmisión. A este tipo de acoplador se lo denomina **transformador de cuarto de onda**.

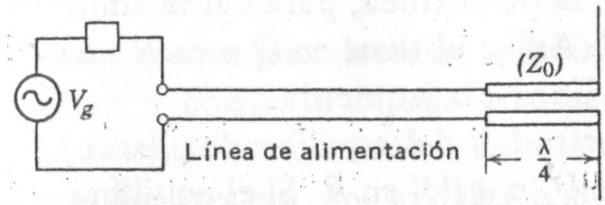


Figura 11: Transformador de cuarto de onda.

Por otro lado si la carga tiene una impedancia compleja, \hat{Z}_L , entonces el procedimiento anterior no es suficiente para realizar un acoplamiento. Es necesario introducir entre el acoplador y la carga, un nuevo tramo de línea de impedancia Z_1 y longitud l_1 . Con la ayuda de la ecuación (126), es posible determinar un valor adecuado para l_1 de tal manera que la impedancia de carga (la que ve como carga el transformador de cuarto onda) sea real. Detalles de este procedimiento pueden consultarse en las referencias [9, 10].

3.4. Acoplamientos mediante equilibradores stubs

Algunos de los elementos que se emplean para acoplar impedancias pueden observarse en la figura 12. La elección de uno de estos dispositivos depende de la frecuencia de trabajo. Por arriba de los 100 MHz, lo que corresponde longitudes de onda del orden de metros, los acoplamientos realizados con elementos englobados [figuras 12 (a) y (b)] son físicamente muy pequeños e ineficientes. En estos casos se usan **equilibradores stub**.

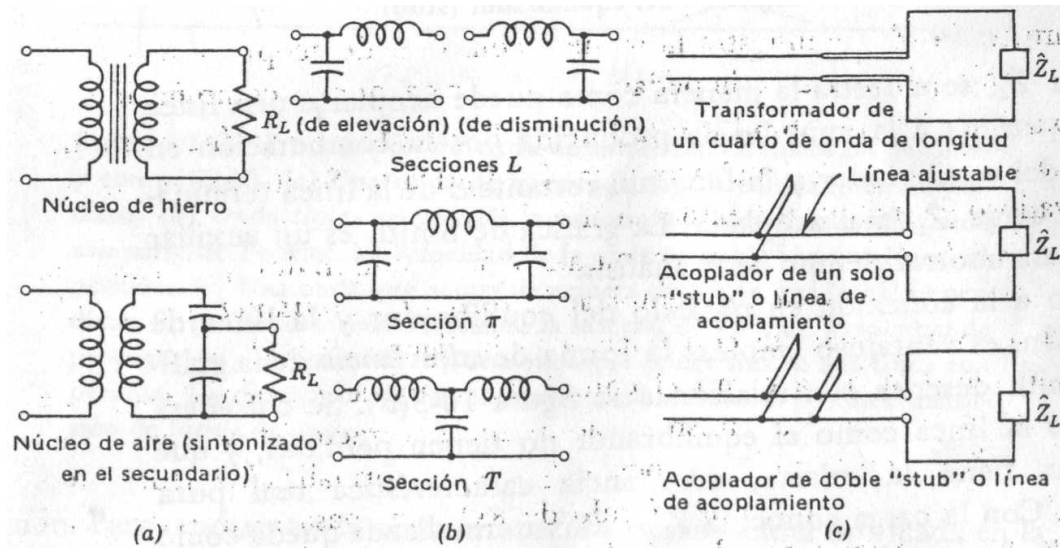


Figura 12: Diferentes arreglos para acoplar impedancias.

Un stub sólo es un tramo de línea de transmisión con pérdidas despreciables, en cuyo extremo la carga está o en cortocircuito o abierta. Las impedancias de entrada de estos dispositivos están dadas por las ecuaciones (127) y (128). La forma más sencilla de conectar un stub para acoplar una línea sin pérdidas de impedancia característica Z_0 , con una carga \hat{Z}_L , es mostrada en la figura 13. En este caso se ha empleado un stub con un cortocircuito en su extremo. Como vemos, el equilibrador se conecta en paralelo a una distancia d de la carga y, por simplicidad, se elige del mismo material que la línea de transmisión. Usando la carta de Smith de admitancia,

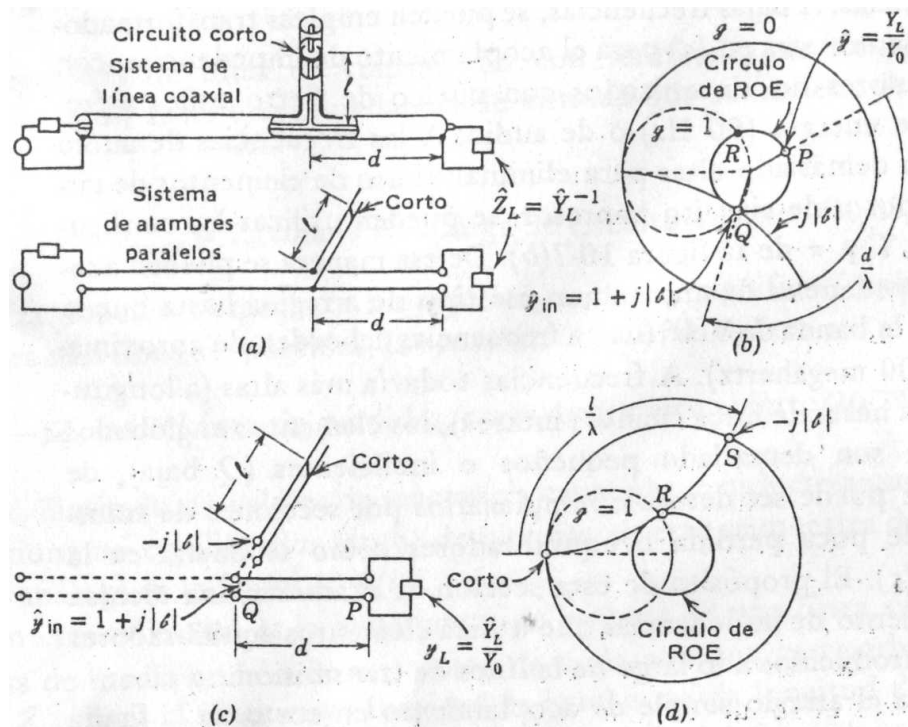


Figura 13: Acoplamiento de impedancias usando un stub.

es posible encontrar los valores de d y l que permiten realizar el acoplamiento. Los pasos a seguir son los siguientes (ver figura 13):

- Se localiza en la carta de Smith el punto P donde está situada la admitancia normalizada de la carga, $\hat{y}_L = \hat{Y}_L/Y_0$, donde $\hat{Y}_L = 1/\hat{Z}_L$ e $Y_0 = 1/Z_0$ es la admitancia característica de la línea.
- Siguiendo el círculo de ROE, rotamos en forma horaria (nos acercamos a la fuente) hasta interceptar por primera vez el círculo de $g = 1$. En la figura 13 este punto está marcado como Q . Este giro corresponde a una distancia d medida en longitudes de onda λ lo que nos permite calcular, para una determinada frecuencia, el valor de d . En este punto Q , la admitancia de entrada de este tramo de línea con la carga en su extremo es $\hat{y} = 1 + jf$ (usamos f como la parte imaginaria para no confundirnos con la longitud l). Hay otro punto R , en el cual interceptamos nuevamente el círculo de $g = 1$ y que corresponde a una admitancia de $\hat{y} = 1 - jf$.
- Si en el punto Q se coloca en paralelo un stub cuya admitancia sea igual a $-jf$ (o en el punto R con admitancia jf), entonces es posible cancelar la parte imaginaria ya que la admitancia de este paralelo será $\hat{y}_{||} = 1$, lo que corresponde a una impedancia normalizada $\hat{z}_{||} = 1$ o sin normalizar $\hat{Z}_{||} = Z_0$. Para encontrar la longitud l para la cual el stub tiene este valor de admitancia, podemos usar la ecuación (127) o la carta de Smith de admitancia como se muestra en la figura 13.

Problema. Un transmisor operando a 150 [MHz] ($\lambda = 2$ [m]), alimenta una carga de antena de 72 [Ω] por medio de 12 metros de línea de alambres paralelos, con dieléctrico de aire y $Z_0 = 300$ [Ω]. Calcular la longitud que debería tener un stub terminado en un cortocircuito y la distancia a la cual se debería conectar, de tal forma de acoplar el transmisor con la carga. Suponer que el stub está hecho del mismo material que la línea. El esquema del sistema es mostrado en la figura 14 (a).

Como la admitancia de la carga es de $Y_L = 1/72 = 0,014$ y la de la línea es $Y_0 = 1/300 = 0,00333$, la admitancia normalizada de la carga queda $y_L = 0,014/0,00333 = 4,17$. Esta se muestra en la figura 14 (b) como el punto P en la gráfica de Smith. Siguiendo el círculo de ROE y rotando en forma horaria $0,071\lambda$, se obtiene un intersección con el círculo de $g = 1$. De esta forma vemos que el stub debe situarse a una distancia $d = 0,071\lambda = 14,2$ [cm] medida desde donde está conectada la carga. Como el punto de intersección en la carta de Smith está en $\hat{y} = 1 - j1,6$, el stud debe tener una longitud tal que permita cancelar la parte imaginaria de esta admitancia. Partiendo del punto de corto situado en el círculo de $g = 0$ [ver figura 14 (c)], es necesario girar en forma horaria una longitud $l = 0,411\lambda$ para que el stub tenga una

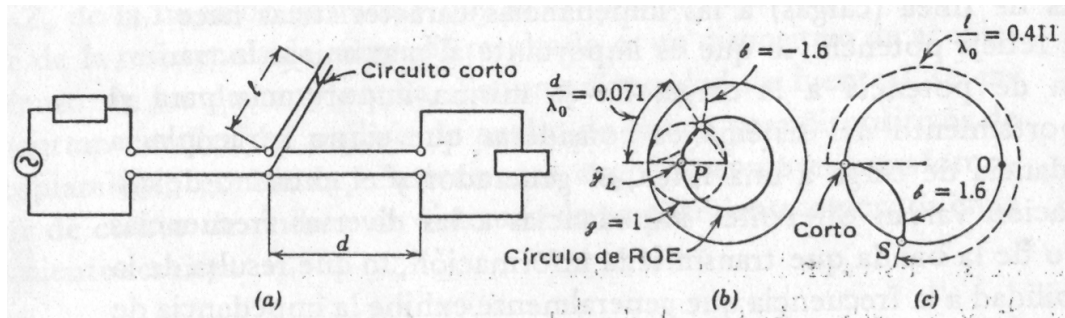


Figura 14: Ejemplo de acoplamiento de impedancias usando un stub.

admitancia normalizada de $j1,6$. De esta forma la admitancia normalizada del paralelo será igual a 1 y las impedancias quedarán acopladas. La longitud del stub será de $l = 0,411\lambda = 0,822$ [m].

Siguiendo razonamientos similares es posible acoplar impedancias conectando en serie un equilibrador stub [9]. Por otro lado, notemos que el acoplamiento se realiza siempre para una determinada frecuencia de trabajo. Si la carga cambia o cambia la frecuencia, se hace necesario modificar las distancias d y l . Aunque esta última es fácil de cambiar, ya que el stub puede construirse de tal forma que el cortocircuito sea deslizable, la distancia d a la que se realiza la conexión en paralelo está situada sobre la misma línea de transmisión, lo que dificulta la tarea de modificar su valor. Para solucionar este problema, se emplean dos o tres stubs en paralelo. Este arreglo permite adaptar impedancia con sólo cambiar el largo de los stubs (sin modificar la distancia entre ellos). Un detalle del procedimiento para calcular las posiciones de conexión así como las longitudes de estos stubs pueden consultarse en las referencias [9, 10].

Referencias

- [1] Carl T. A. Johnk, **Teoría electromagnética. Campos y ondas**. Limusa (1999).
- [2] Leonard Eyges, **The classical electromagnetic field**. Dover (1972).
- [3] John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W. Christy, **Fundamentos de la teoría electromagnética**. Addison-Wesley (1984).
- [4] John D. Jackson, **Classical Electrodynamics**. John Wiley and Sons (1999).
- [5] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, **Solid State Physics**. Cornell University (1976).
- [6] David J. Griffiths, **Introduction to Electrodynamics**. Prentice Hall (1999).
- [7] M. I. Prieto and M. Quintillán, Am. J. Phys. **57**, 277 (1989).
- [8] J. L. Volakis, A. Chatterjee and L. C. Kempel, **Finite Element Method for Electromagnetics**. IEEE Press (1998).
- [9] Rodolfo N. Vela, **Líneas de transmisión**. McGraw-Hill (1999).
- [10] Ing. Alejandro Nuñez, **Método de Acoplamiento de Impedancias en Líneas de Transmisión**.

Problemas

1. Se conecta un transmisor que genera una señal de frecuencia $f = 30$ [MHz], a una carga cuya impedancia es $\hat{Z}_L = 50 + j20$ [Ω]. La línea de transmisión que los une es sin pérdidas, tiene 14,2 [m] de longitud y una impedancia característica $Z_0 = 50$ [Ω] con dieléctrico de aire. Calcular analíticamente la impedancia de entrada a la línea (con la carga conectada en su extremo).
2. Se conecta un transmisor de impedancia interna $\hat{Z}_g = 50$ [Ω], que genera una señal de frecuencia de 300 [MHz] y amplitud de 10 [V], a una antena cuya impedancia es $\hat{Z}_L = 76 + j20$ [Ω]. La línea de transmisión que los une es sin pérdidas, tiene 9 [m] de longitud y una impedancia característica de $Z_0 = 50$ [Ω] con dieléctrico de aire. La figura 15 muestra un esquema del circuito. Calcular:
 - a) La tensión, la corriente y la potencia en la carga.
 - b) Si deseamos incrementar la longitud de la línea sin que cambie la potencia suministrada a la antena, ¿qué precauciones deberíamos tener para elegir la nueva longitud?.

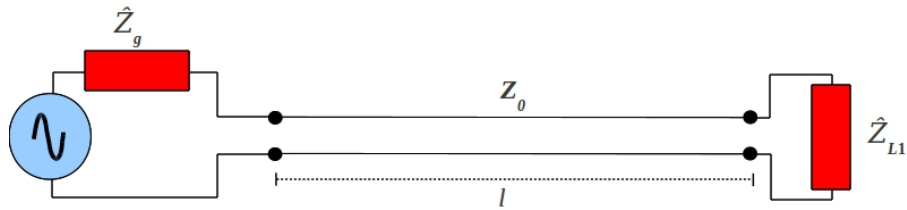


Figura 15: Problema 2.

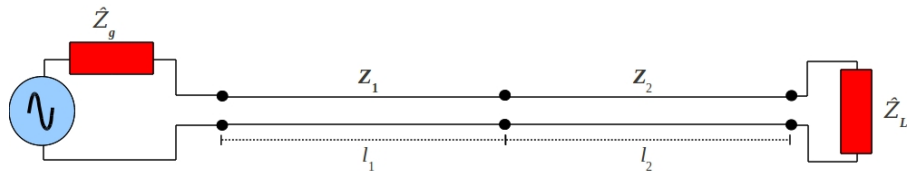
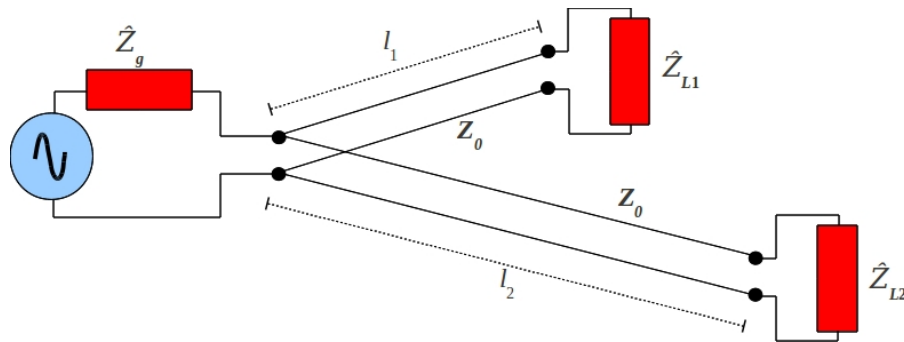


Figura 16: Problema 3.

3. Una antena de impedancia $\hat{Z}_L = 75 + j40$ [Ω], es excitada por un transmisor que emite una señal de 70 [V] de amplitud y 30 [MHz] de frecuencia. Ambos dispositivos están conectados mediante dos líneas de transmisión sin pérdidas unidas en serie (ver figura 16). La línea 1 (la cual está conectada al transmisor) tiene una longitud de $l_1 = 52,5$ [m], una impedancia característica $Z_1 = 70$ [Ω] y dieléctrico de aire, mientras que la línea 2 (conectada a la carga) tiene una longitud de $l_2 = 50$ [m], una impedancia característica $Z_2 = 50$ [Ω] y dieléctrico con permitividad $\epsilon = 2\epsilon_0$ (suponga que el dieléctrico de ambas líneas tienen una permeabilidad igual a la del vacío). Si la impedancia de salida del transmisor es de $\hat{Z}_g = 100$ [Ω], determinar:
 - a) La impedancia de entrada que ve el transmisor en el extremo de sus terminales (impedancia de ambas líneas con la carga conectada).
 - b) La potencia entregada por el transmisor a la carga.

- c) Reproducir el proceso de cálculo de la impedancia de entrada en la carta de Smith de la figura 17 (indicar con trazos los valores que toma la impedancia normalizada desde la carga hasta el transmisor).
4. Se conecta un transmisor que genera una señal de frecuencia $f = 30$ [MHz], a una carga cuya impedancia es $\hat{Z}_L = 25 + j20$ [Ω]. La línea de transmisión que los une es sin pérdidas, tiene un dieléctrico con permitividad $\epsilon = 4\epsilon_0$ y permeabilidad $\mu = \mu_0$, una longitud $l = 33,54$ [m] y una impedancia característica de $Z_0 = 50$ [Ω].
- a) Usando la carta de Smith de la figura 17, calcular el valor de la impedancia de entrada a la línea. Indique en la carta el proceso de cálculo.
- b) Calcular nuevamente la impedancia de entrada a la línea pero esta vez en forma analítica.
5. En la figura siguiente, el transmisor de impedancia interna $\hat{Z}_g = 100$ [Ω], genera una señal de frecuencia de 100 [MHz] con una amplitud de 10 [V]. Las líneas de transmisión no tienen pérdidas, su impedancia característica es de $Z_0 = 50$ [Ω], el dieléctrico es aire y sus longitudes son $l_1 = 30$ [m] y $l_2 = 60$ [m]. En los extremos de estas líneas están conectadas dos cargas con impedancias $\hat{Z}_{L1} = 80 + j20$ [Ω] y $\hat{Z}_{L2} = 40 - j40$ [Ω]. Calcular la potencia total suministrada por el transmisor y las potencias entregadas a cada una de las cargas.



6. Se desea conectar una carga de $\hat{Z}_L = 500$ [Ω], con una línea sin pérdidas cuya impedancia característica es de $Z_0 = 50$ [Ω]. Suponiendo que la frecuencia de trabajo es de 300 [MHz] y que la línea tiene dieléctrico de aire, determinar aproximadamente la longitud que debería tener una stub terminado en cortocircuito y la posición donde debería conectarse, de tal forma que se puedan acoplar ambas impedancias. Para realizar los cálculos use una carta de Smith de admitancia (se puede usar la carta de Smith de impedancia mostrada en la figura 17 rotándola 180°).
7. Se desea acoplar una carga $\hat{Z}_L = 9,61 + j48,08$ [Ω] a una línea sin pérdidas cuya impedancia característica es de $Z_0 = 50$ [Ω]. La frecuencia a la cual se trabajará es $f = 30$ [MHz] y la línea tiene un dieléctrico con parámetros $\epsilon = 4\epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$. Usando una carta de Smith de admitancia, determinar la configuración (longitudes d y l) que debería tener un stub terminado en circuito abierto para que la carga quede acoplada a la línea de transmisión. Indique el procedimiento en la carta de Smith.

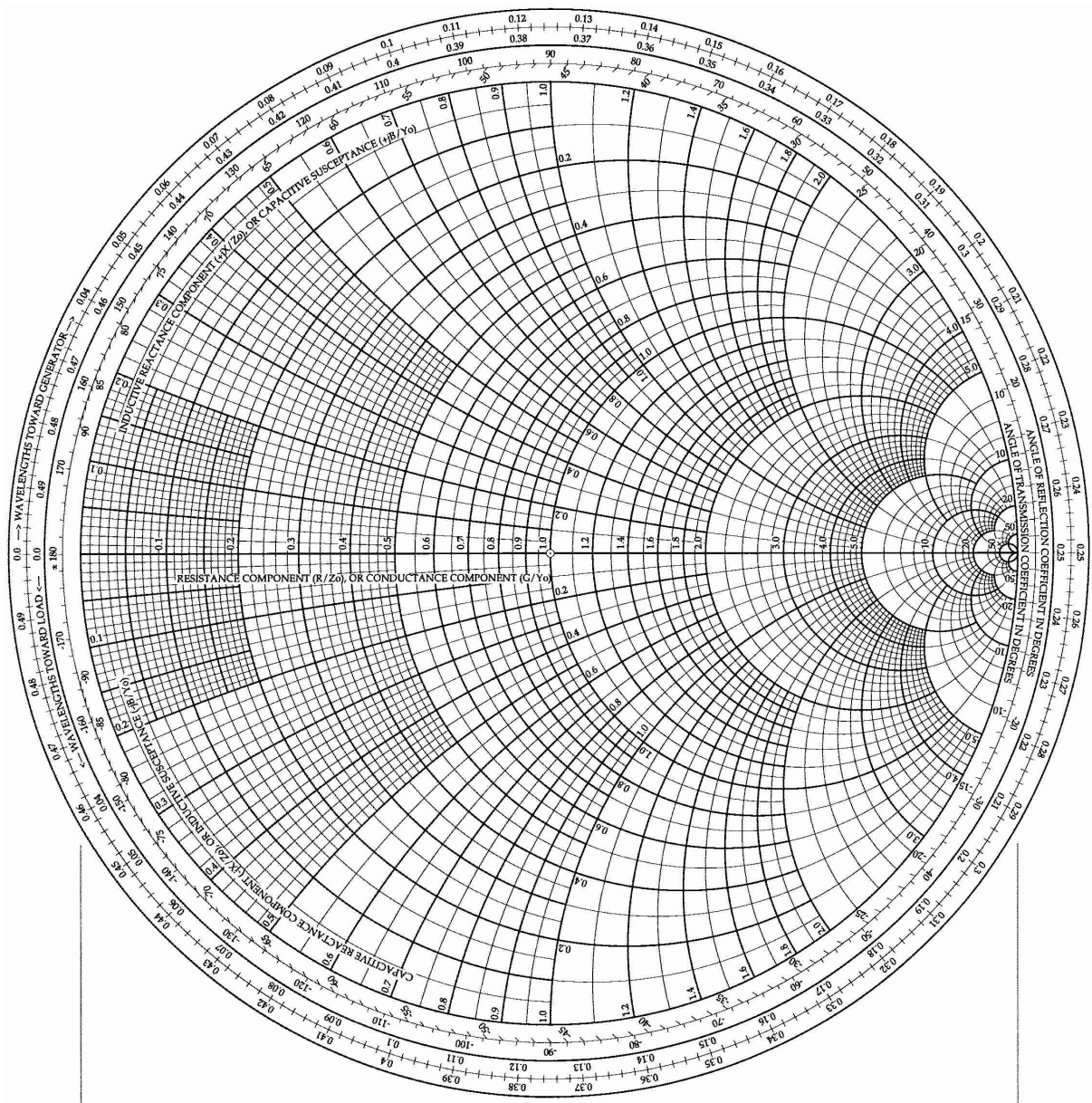


Figura 17: Carta de Smith de impedancias.