

# Unidad 6

## Guías de ondas

14 de junio de 2018

Una onda electromagnética es capaz de propagarse en la atmósfera terrestre alcanzando grandes distancias sin perder mucha energía. No obstante, en la Unidad 5 vimos que en este medio las propiedades de reflexión tanto de la tierra como de la ionósfera establecen algunas limitaciones. Por ejemplo, existe una frecuencia crítica que depende de las condiciones atmosféricas imperantes, por arriba de la cual las ondas ya no se reflejan en la ionósfera. En la práctica, para establecer una comunicación entre dos puntos, se emplean diferentes **medios de transmisión** que permiten el envío de señales electromagnéticas a grandes distancias. En esta unidad se estudiará la **teoría de modos de propagación en guías de ondas uniformes**, haciendo especial énfasis en las **guías de ondas huecas** rectangulares.

### 1. Campos electromagnéticos en guías de ondas

La figura 1 muestra diferentes tipos de guías de ondas, las cuales están formadas por conductores que poseen una sección transversal uniforme y están rodeados por un medio dieléctrico. Debido a esta simetría, si esta sección se mantiene invariante a lo largo de por ejemplo el eje  $z$ , entonces los campos que se propaguen en esta dirección tendrán una dependencia de la forma  $e^{\mp\gamma z}$  (formalmente esto se puede demostrar mediante la técnica de separación de variables). Por lo tanto, trabajando en coordenadas cilíndricas generalizadas, deberemos buscar soluciones del tipo

$$\hat{\mathbf{E}}(u_1, u_2, z, t) = \hat{\mathbf{E}}^{\pm}(u_1, u_2) e^{j\omega t \mp \gamma z} \quad (1)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(u_1, u_2, z, t) = \hat{\mathbf{H}}^{\pm}(u_1, u_2) e^{j\omega t \mp \gamma z}, \quad (2)$$

donde las variables  $u_1$  y  $u_2$  especifican las coordenadas transversales y  $\gamma$  es la constante de propagación. Los índices  $\pm$  denotan los campos correspondientes a ondas viajeras que se propagan en ambas direcciones del eje  $z$ . Como veremos a continuación, estas formas funcionales simplifican significativamente las ecuaciones de Maxwell.

Si suponemos que el material dieléctrico que rodea a una guía de onda no tiene pérdidas, entonces para esta región la permitividad será real y la densidad de corriente será cero. Las formas complejas armónicas de las leyes de Faraday y Ampère se escribirán, respectivamente, como

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega \hat{\mathbf{B}} \quad (3)$$

y

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = j\omega \hat{\mathbf{D}}. \quad (4)$$

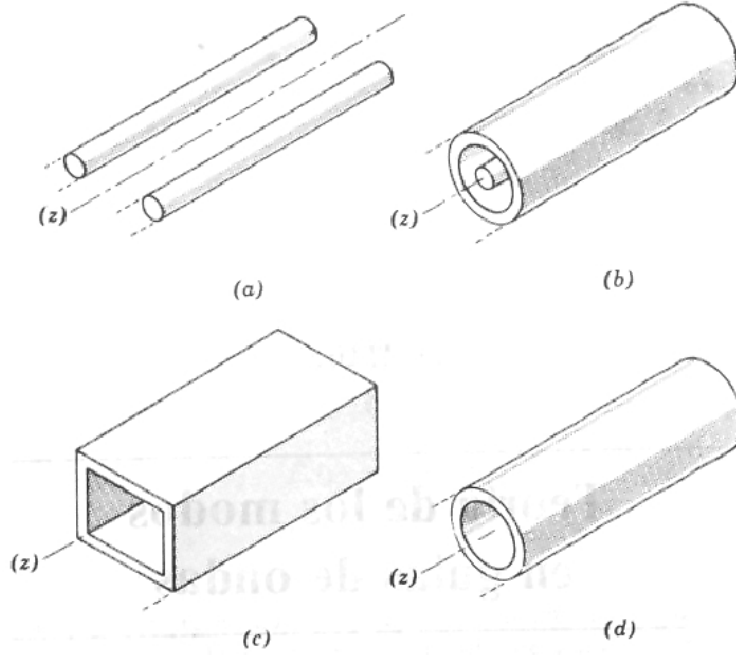


Figura 1: Diferentes tipos de guías de ondas.

Trabajando por simplicidad en coordenadas rectangulares (es decir, tomando  $u_1 = x$  y  $u_2 = y$ ), las amplitudes complejas de los campos (1) y (2) puede escribirse como

$$\hat{\mathbf{E}}^\pm(x, y) = \mathbf{a}_x \hat{E}_x^\pm(x, y) + \mathbf{a}_y \hat{E}_y^\pm(x, y) + \mathbf{a}_z \hat{E}_z^\pm(x, y) \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{H}}^\pm(x, y) = \mathbf{a}_x \hat{H}_x^\pm(x, y) + \mathbf{a}_y \hat{H}_y^\pm(x, y) + \mathbf{a}_z \hat{H}_z^\pm(x, y). \quad (6)$$

Supongamos ahora que el medio dieléctrico está caracterizado por la permitividad real  $\epsilon$  y la permeabilidad  $\mu$ . Reemplazando los campos (1) y (2) en la ecuación (3) y desarrollando el rotacional, obtenemos las siguientes relaciones escalares para cada una de las componentes

$$\left[ \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial y} - (\mp \gamma) \hat{E}_y^\pm \right] e^{j\omega t \mp \gamma z} = -j\omega \mu \hat{H}_x^\pm e^{j\omega t \mp \gamma z} \quad (7)$$

$$\left[ \mp \gamma \hat{E}_x^\pm - \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial x} \right] e^{j\omega t \mp \gamma z} = -j\omega \mu \hat{H}_y^\pm e^{j\omega t \mp \gamma z} \quad (8)$$

$$\left[ \frac{\partial \hat{E}_y^\pm}{\partial x} - \frac{\partial \hat{E}_x^\pm}{\partial y} \right] e^{j\omega t \mp \gamma z} = -j\omega \mu \hat{H}_z^\pm e^{j\omega t \mp \gamma z}. \quad (9)$$

Cancelando los factores exponenciales las ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$\frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial y} \pm \gamma \hat{E}_y^\pm = -j\omega \mu \hat{H}_x^\pm \quad (10)$$

$$\mp \gamma \hat{E}_x^\pm - \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial x} = -j\omega \mu \hat{H}_y^\pm \quad (11)$$

$$\frac{\partial \hat{E}_y^\pm}{\partial x} - \frac{\partial \hat{E}_x^\pm}{\partial y} = -j\omega \mu \hat{H}_z^\pm, \quad (12)$$

que en forma más compacta se expresan de la siguiente manera

$$\boxed{\nabla' \times \hat{\mathbf{E}}^\pm = -j\omega \mu \hat{\mathbf{H}}^\pm}, \quad (13)$$

donde el operador **rotacional modificado**  $\nabla' \times$  en coordenadas cartesianas está definido como

$$\nabla' \times \hat{\mathbf{F}}^\pm \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \mp \gamma \\ \hat{F}_x^\pm & \hat{F}_y^\pm & \hat{F}_z^\pm \end{vmatrix}. \quad (14)$$

La expresión (13) es la forma particular que adquiere la ley de Faraday para una guía de onda. Siguiendo un procedimiento similar, a partir de la ley de Ampère (4) podemos escribir tres ecuaciones similares a (10), (11) y (12)

$$\frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial y} \pm \gamma \hat{H}_y^\pm = j\omega\epsilon \hat{E}_x^\pm \quad (15)$$

$$\mp \gamma \hat{H}_x^\pm - \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial x} = j\omega\epsilon \hat{E}_y^\pm \quad (16)$$

$$\frac{\partial \hat{H}_y^\pm}{\partial x} - \frac{\partial \hat{H}_x^\pm}{\partial y} = j\omega\epsilon \hat{E}_z^\pm, \quad (17)$$

las cuales se pueden escribir en forma más compacta como

$$\boxed{\nabla' \times \hat{\mathbf{H}}^\pm = j\omega\epsilon \hat{\mathbf{E}}^\pm}. \quad (18)$$

Con campos electromagnéticos de la forma (1) y (2) también es posible simplificar las ecuaciones de onda. Como vimos en la Unidad 4, para una región sin densidades de cargas y corrientes estas se escriben como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (19)$$

y

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (20)$$

Cada una de las componentes de estos campos respeta una ecuación de onda escalar. Por ejemplo para la componente  $x$  de  $\mathbf{E}$  tenemos que

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0. \quad (21)$$

Suponiendo que el campo eléctrico es de la forma (1), la expresión armónica compleja de esta ecuación es

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_x^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{E}_x^\pm}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu\epsilon) \hat{E}_x^\pm = 0. \quad (22)$$

Definiendo la constante

$$\hat{k}_c^2 \equiv \gamma^2 + \omega^2 \mu\epsilon, \quad (23)$$

la ecuación diferencial (22) queda como

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_x^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{E}_x^\pm}{\partial y^2} + \hat{k}_c^2 \hat{E}_x^\pm = 0. \quad (24)$$

Las ecuaciones de onda para el resto de las componentes de los campos eléctrico y magnético adquieren esta misma forma.

## 2. Modos de propagación TM, TE y TEM

En esta sección analizaremos los diferentes modos de propagación de ondas electromagnéticas en medios confinados como las guía de onda. Por simplicidad seguiremos trabajando en coordenadas cartesianas.

Consideremos los conjuntos de ecuaciones (10-12) y (15-17). Combinando (11) y (15) es posible eliminar  $\hat{H}_y^\pm$  para luego despejar la componente  $x$  de la amplitud compleja del campo eléctrico

$$\hat{E}_x^\pm = -\frac{1}{\hat{k}_c^2} \left[ \pm \gamma \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial y} \right]. \quad (25)$$

De igual manera, eliminando  $\hat{H}_x^\pm$  entre (10) y (16) obtenemos

$$\hat{E}_y^\pm = \frac{1}{\hat{k}_c^2} \left[ \mp \gamma \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial x} \right]. \quad (26)$$

Luego, con estos mismos pares de ecuaciones, podemos eliminar sucesivamente  $\hat{E}_x^\pm$  e  $\hat{E}_y^\pm$  para obtener las siguientes expresiones

$$\hat{H}_x^\pm = \frac{1}{\hat{k}_c^2} \left[ j\omega\epsilon \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial y} \mp \gamma \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial x} \right] \quad (27)$$

y

$$\hat{H}_y^\pm = -\frac{1}{\hat{k}_c^2} \left[ j\omega\epsilon \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial x} \pm \gamma \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial y} \right]. \quad (28)$$

Notemos que las ecuaciones (25-28) permiten determinar los campos transversales en una guía de onda a partir de las componentes longitudinales  $\hat{E}_z^\pm$  y  $\hat{H}_z^\pm$ .

Estas mismas ecuaciones también permiten separar las soluciones de las ecuaciones de onda en clases o grupos denominados **modos**, los cuales se pueden caracterizar a través de las componentes longitudinales de los campos. Se definen tres modos:

- **Modo transversal magnético (TM)**. En este tipo de soluciones el campo magnético no tiene una componente longitudinal, por lo que  $\hat{H}_z^\pm = 0$ . Para esta condición las ecuaciones (25-28) quedan

### Modo TM

$$\hat{E}_x^\pm = \frac{\mp \gamma}{\hat{k}_c^2} \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial x} \quad (29)$$

$$\hat{E}_y^\pm = \frac{\mp \gamma}{\hat{k}_c^2} \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial y} \quad (30)$$

$$\hat{H}_x^\pm = \frac{j\omega\epsilon}{\hat{k}_c^2} \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial y} \quad (31)$$

$$\hat{H}_y^\pm = \frac{-j\omega\epsilon}{\hat{k}_c^2} \frac{\partial \hat{E}_z^\pm}{\partial x}. \quad (32)$$

Haciendo el cociente entre las ecuaciones (29) y (32), y entre (30) y (31), podemos demostrar que

$$\hat{\eta}_{\text{TM}} \equiv \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{\hat{E}_x^+}{\hat{H}_y^+} = -\frac{\hat{E}_x^-}{\hat{H}_y^-} = -\frac{\hat{E}_y^+}{\hat{H}_x^+} = \frac{\hat{E}_y^-}{\hat{H}_x^-}, \quad (33)$$

donde a  $\hat{\eta}_{\text{TM}}$  se la conoce como **impedancia intrínseca de onda para el modo TM**.

- **Modo transversal eléctrico (TE).** En este caso las soluciones de las ecuaciones de onda no tienen una componente longitudinal del campo eléctrico, es decir  $\hat{E}_z^\pm = 0$ . Para esta condición las ecuaciones (25-28) quedan

$$\begin{array}{c} \text{Modo TE} \\ \hat{E}_x^\pm = \frac{-j\omega\mu}{\hat{k}_c^2} \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial y} \end{array} \quad (34)$$

$$\hat{E}_y^\pm = \frac{j\omega\mu}{\hat{k}_c^2} \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial x} \quad (35)$$

$$\hat{H}_x^\pm = \frac{\mp\gamma}{\hat{k}_c^2} \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial x} \quad (36)$$

$$\hat{H}_y^\pm = \frac{\mp\gamma}{\hat{k}_c^2} \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial y}. \quad (37)$$

Haciendo el cociente entre las ecuaciones (34) y (37), y entre (35) y (36), podemos demostrar que

$$\hat{\eta}_{\text{TE}} \equiv \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\hat{E}_x^+}{\hat{H}_y^+} = -\frac{\hat{E}_x^-}{\hat{H}_y^-} = -\frac{\hat{E}_y^+}{\hat{H}_x^+} = \frac{\hat{E}_y^-}{\hat{H}_x^-}, \quad (38)$$

donde a  $\hat{\eta}_{\text{TE}}$  se la conoce como **impedancia intrínseca de onda para el modo TE**.

- **Modo transversal electromagnético (TEM).** En este caso ambos campos no tienen una componente longitudinal, es decir  $\hat{E}_z^\pm = 0$  y  $\hat{H}_z^\pm = 0$ . De acuerdo a las ecuaciones (25-28), este modo parecería corresponder al caso trivial en el que ambos campos son nulos. Sin embargo, notemos que en el denominador del lado derecho de estas expresiones se encuentra  $\hat{k}_c^2$ . Es posible tener un modo TEM en una guía de onda si esta constante  $\hat{k}_c^2 = 0$  (es decir, las componentes transversales de los campos pueden no ser nulas si se da esta condición). De acuerdo a (23), esto implica que  $\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon = 0$ , o

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}. \quad (39)$$

Vemos entonces que la constante de fase para un modo TEM en una guía de onda, será la misma que para la propagación de una onda plana en una región no limitado con parámetros  $\mu$  y  $\epsilon$ . En la Unidad 7, veremos que este es el modo dominante de propagación de ondas en líneas de transmisión de dos conductores.

### 3. Soluciones para el modo TM en guías de ondas rectangulares

Obtendremos ahora las soluciones para el modo TM en guías de ondas cuya sección transversal es rectangular. Realizamos las siguientes suposiciones:

- El dieléctrico que llena la guía no tiene pérdidas y sus parámetros  $\epsilon$  y  $\mu$  son constantes.
- Las paredes de la guía son conductores perfectos.
- La componente del campo magnético en la dirección de propagación es  $\hat{H}_z^\pm = 0$ .

Las ecuaciones para el modo TM (29-32) muestran que las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético pueden calcularse a partir de  $\hat{E}_z^\pm$ . Para determinar esta función, debemos resolver una ecuación equivalente a (24) pero para la componente de este campo en la dirección de  $z$

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_z^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{E}_z^\pm}{\partial y^2} + \hat{k}_c^2 \hat{E}_z^\pm = 0. \quad (40)$$

La solución de la ecuación diferencial anterior puede obtenerse por el método de separación de variables. Como es usual, suponemos que  $\hat{E}_z^\pm$  puede escribirse como el producto

$$\hat{E}_z^\pm(x, y) = \hat{X}(x)\hat{Y}(y), \quad (41)$$

donde  $\hat{X}(x)$  e  $\hat{Y}(y)$  son funciones de una sola variable. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (40) obtenemos

$$\hat{X}'' \hat{Y} + \hat{X} \hat{Y}'' = -\hat{k}_c^2 \hat{X} \hat{Y}. \quad (42)$$

En la expresión anterior las primas denotan diferenciación respecto a la variable correspondiente. Si luego dividimos por  $\hat{X}\hat{Y}$  obtenemos

$$\frac{\hat{X}''}{\hat{X}} + \frac{\hat{Y}''}{\hat{Y}} = -\hat{k}_c^2. \quad (43)$$

Para que se cumpla la igualdad anterior para todos los valores posibles de  $x$  e  $y$ , es necesario que cada uno de los términos del lado izquierdo sea constante. Es decir

$$\frac{\hat{X}''}{\hat{X}} = -\hat{k}_x^2 \quad y \quad \frac{\hat{Y}''}{\hat{Y}} = -\hat{k}_y^2, \quad (44)$$

donde

$$\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 = \hat{k}_c^2. \quad (45)$$

Las ecuaciones diferenciales (44) pueden reescribirse como

$$\frac{d^2 \hat{X}}{dx^2} + \hat{k}_x^2 \hat{X} = 0 \quad y \quad \frac{d^2 \hat{Y}}{dy^2} + \hat{k}_y^2 \hat{Y} = 0. \quad (46)$$

Vemos entonces que las soluciones para ambas son

$$\hat{X}(x) = \hat{C}_1 \cos(\hat{k}_x x) + \hat{C}_2 \sin(\hat{k}_x x) \quad (47)$$

$$\hat{Y}(y) = \hat{C}_3 \cos(\hat{k}_y y) + \hat{C}_4 \sin(\hat{k}_y y), \quad (48)$$

donde  $\hat{C}_1$ ,  $\hat{C}_2$ ,  $\hat{C}_3$  y  $\hat{C}_4$  son las constantes de integración. Por lo tanto la solución general para el campo eléctrico (41) será

$$\hat{E}_z^\pm(x, y) = \left[ \hat{C}_1 \cos(\hat{k}_x x) + \hat{C}_2 \sin(\hat{k}_x x) \right] \left[ \hat{C}_3 \cos(\hat{k}_y y) + \hat{C}_4 \sin(\hat{k}_y y) \right]. \quad (49)$$

El siguiente paso para obtener una solución particular de este problema, consiste en aplicar las condiciones de frontera adecuadas. Debido a que estamos suponiendo que las paredes de la guía de onda son conductores perfectos, entonces el campo eléctrico en su superficie debe ser normal. Esto implica que  $\hat{E}_z^\pm$  debe ser cero en cada una de las paredes. Supongamos entonces que la sección transversal es un rectángulo, cuyos lados tienen longitudes  $a$  en la dirección de  $x$

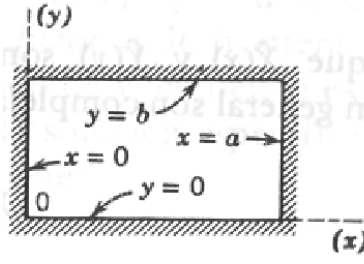


Figura 2: Sección transversal de una guía de ondas hueca rectangular.

y  $b$  en la dirección de  $y$ . Eligiendo el origen de coordenadas en un córner de la guía (ver figura 2), las condiciones de frontera se pueden escribir como:

$$\hat{E}_z^\pm(0, y) = 0 \quad \text{para } y \in [0, b] \quad (50)$$

$$\hat{E}_z^\pm(a, y) = 0 \quad \text{para } y \in [0, b] \quad (51)$$

$$\hat{E}_z^\pm(x, 0) = 0 \quad \text{para } x \in [0, a] \quad (52)$$

$$\hat{E}_z^\pm(x, b) = 0 \quad \text{para } x \in [0, a]. \quad (53)$$

El siguiente paso es aplicar estas condiciones de frontera a la solución general (49). De (50) obtenemos

$$0 = [\hat{C}_1] [\hat{C}_3 \cos(\hat{k}_y y) + \hat{C}_4 \sin(\hat{k}_y y)] \quad (54)$$

y por lo tanto para satisfacer esta condición de frontera para  $y \in [0, b]$ , es necesario elegir  $\hat{C}_1 = 0$ . De esta forma (49) queda como

$$\hat{E}_z^\pm(x, y) = \hat{C}_2 \sin(\hat{k}_x x) [\hat{C}_3 \cos(\hat{k}_y y) + \hat{C}_4 \sin(\hat{k}_y y)]. \quad (55)$$

Luego, si aplicamos (51) en esta última ecuación, obtenemos

$$0 = \hat{C}_2 \sin(\hat{k}_x a) [\hat{C}_3 \cos(\hat{k}_y y) + \hat{C}_4 \sin(\hat{k}_y y)], \quad (56)$$

expresión que tiene que ser válida para  $y \in [0, b]$ . No es posible elegir la constante de integración  $\hat{C}_2$  igual a cero pues sólo obtendríamos una solución trivial. Para cumplir con esta última condición basta con elegir

$$\boxed{\hat{k}_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{con } m = 1, 2, 3, \dots} \quad (57)$$

Se han omitido los valores negativos de  $m$  pues no agregan nuevas soluciones y también el valor  $m = 0$  pues sólo conduce a la solución trivial. De esta forma el campo eléctrico (55) queda

$$\hat{E}_z^\pm(x, y) = \hat{C}_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) [\hat{C}_3 \cos(\hat{k}_y y) + \hat{C}_4 \sin(\hat{k}_y y)]. \quad (58)$$

Aplicando a esta última ecuación las restantes condiciones de frontera (52) y (53), se deduce fácilmente que  $\hat{C}_3 = 0$  y que se debe cumplir la condición

$$\boxed{\hat{k}_y = \frac{n\pi}{b} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots} \quad (59)$$

Por lo tanto el campo eléctrico complejo quedará

$$\hat{E}_z^\pm(x, y) = \hat{C}_2 \hat{C}_4 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \quad (60)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el producto  $\hat{C}_2\hat{C}_4$  representa una única amplitud compleja la cual denominaremos  $\hat{E}_{z,mn}^\pm$ , la ecuación anterior podrá reescribirse como

$$\boxed{\hat{E}_z^\pm(x, y) = \hat{E}_{z,mn}^\pm \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \text{con } m, n = 1, 2, 3, \dots} \quad (61)$$

Como esta solución para la componente  $z$  del campo eléctrico depende de los parámetros  $m$  y  $n$ , se dice que pertenece al modo  $\text{TM}_{mn}$ . El resto de las componentes de los campos para este modo, se pueden calcular a partir de las expresiones (29-32). Derivando (61) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{E}_x^\pm(x, y) &= \left[ \mp \frac{\gamma_{mn}}{\hat{k}_c^2} \frac{m\pi}{a} \hat{E}_{z,mn}^\pm \right] \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &= \hat{E}_{x,mn}^\pm \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_y^\pm(x, y) &= \left[ \mp \frac{\gamma_{mn}}{\hat{k}_c^2} \frac{n\pi}{b} \hat{E}_{z,mn}^\pm \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &= \hat{E}_{y,mn}^\pm \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_x^\pm(x, y) &= \left[ \frac{j\omega\epsilon}{\hat{k}_c^2} \frac{n\pi}{b} \hat{E}_{z,mn}^\pm \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &= \hat{H}_{x,mn}^\pm \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_y^\pm(x, y) &= \left[ \frac{-j\omega\epsilon}{\hat{k}_c^2} \frac{m\pi}{a} \hat{E}_{z,mn}^\pm \right] \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &= \hat{H}_{y,mn}^\pm \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \end{aligned} \quad (65)$$

Notemos que, debido a las ecuaciones (23) y (45), y a que  $\hat{k}_x$  y  $\hat{k}_y$  dependen de los parámetros  $m$  y  $n$ , podemos escribir que

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon. \quad (66)$$

Por lo tanto, la constante de propagación también dependerá de estos parámetros

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] - \omega^2\mu\epsilon}. \quad (67)$$

La ecuación anterior no sólo muestra que la constante de propagación es una función de las dimensiones transversales de la guía de onda hueca, sino que además existe en el sistema una **frecuencia de corte**. Para ver esto, observemos que si el argumento en la raíz de (67) es positivo, entonces  $\gamma_{mn}$  será una cantidad real pura y por lo tanto la onda no se propagará. Por el contrario, un argumento negativo producirá una constante de propagación imaginaria pura que implica que la onda se propagará en el sistema sin atenuarse. La transición entre estos dos casos ocurrirá cuando se cumpla la condición

$$\omega_{c,mn}^2\mu\epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (68)$$

donde  $\omega_c$  es una frecuencia angular de corte que depende de los parámetros  $m$  y  $n$ . Por lo tanto la frecuencia de corte estará dada por

$$f_{c,mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (69)$$

De esta forma, una guía de onda se comportan como si fuera un filtro pasa alto.

Para el caso en que  $f > f_{c,mn}$ , la constante de propagación como función de la frecuencia de corte se puede escribirse como

$$\gamma_{mn} = j\beta_{mn} = j\beta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2} \quad f > f_{c,mn}, \quad (70)$$

donde  $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  es la constante de fase que tendría una onda plana si se propagara en un medio no limitado con parámetros  $\mu$  y  $\epsilon$ . Vemos que la constante de fase  $\beta_{mn}$  para un modo TM en una guía de onda hueca es menor a  $\beta$ , aunque al aumentar la frecuencia las diferencias disminuyen. Por otro lado, si  $f < f_{c,mn}$  la constante de propagación se puede escribir como

$$\gamma_{mn} = \alpha_{mn} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2 - 1} \quad f < f_{c,mn}. \quad (71)$$

Como mencionamos anteriormente, siendo  $\alpha_{mn}$  una cantidad real pura, las ondas electromagnéticas de estas frecuencias no podrán propagarse en el modo  $\text{TM}_{mn}$ . A estos se los denomina modos desvanecientes (el fenómeno es similar a lo que sucede en la ionósfera por debajo de la frecuencia crítica).

Una vez determinada la constante de fase es posible calcular otras cantidades. Para el caso de mayor interés  $f > f_{c,mn}$ , la longitud de onda es

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}} \quad f > f_{c,mn}, \quad (72)$$

la velocidad de fase en la dirección  $z$  es

$$v_{p,mn} = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{v_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}} \quad f > f_{c,mn}, \quad (73)$$

y la impedancia intrínseca del modo  $\text{TM}_{mn}$ , ecuación (33), es

$$\hat{\eta}_{\text{TM},mn} = \frac{j\beta_{mn}}{j\omega\epsilon} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2} \quad f > f_{c,mn}. \quad (74)$$

En las tres ecuaciones anteriores,  $\lambda = 2\pi/\beta$ ,  $v_p = \omega/\beta$  y  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  son, respectivamente, la longitud de onda, la velocidad de fase y la impedancia intrínseca de una onda plana que se propaga en un medio no limita con parámetros  $\mu$  y  $\epsilon$ . Como vimos anteriormente, al aumentar la frecuencia  $\lambda_{mn} \rightarrow \lambda$ ,  $v_{p,mn} \rightarrow v_p$  y  $\hat{\eta}_{\text{TM},mn} \rightarrow \hat{\eta}$ .

Finalmente, escribimos la forma de tiempo real de la componente  $z$  del campo eléctrico en el modo  $\text{TM}_{mn}$  para  $f > f_{c,mn}$ . Multiplicando la ecuación (61) por  $e^{j(\omega t \mp \beta_{mn} z)}$  y luego tomando la parte real obtenemos

$$E_z^\pm(x, y, z, t) = E_{z,mn}^\pm \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t \mp \beta_{mn} z) \quad \text{con } m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (75)$$

cuya naturaleza claramente es la de una onda viajera.

## 4. Soluciones para el modo TE en guías de ondas rectangulares

Trabajando como en la sección anterior, es posible obtener las soluciones para el modo TE de una guía de onda hueca con una sección transversal rectangular. Las suposiciones en este caso son casi idénticas a las anteriores

- a) El dieléctrico que llena la guía no tiene pérdidas y sus parámetros  $\epsilon$  y  $\mu$  son constantes.
- b) Las paredes de la guía son conductores perfectos.
- c) La componente del campo eléctrico en la dirección de propagación es  $\hat{E}_z^\pm = 0$ .

Las ecuaciones para el modo TE (34-37) muestran que las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético pueden calcularse a partir de  $\hat{H}_z^\pm$ . Para determinar esta función, debemos resolver una ecuación equivalente a (24) pero para la componente del campo magnético en la dirección de  $z$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}_z^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{H}_z^\pm}{\partial y^2} + \hat{k}_c^2 \hat{H}_z^\pm = 0. \quad (76)$$

Como en la sección anterior, una solución general de esta ecuación puede obtenerse por el método de separación de variables

$$\hat{H}_z^\pm(x, y) = \left[ \hat{C}_1 \cos(\hat{k}_x x) + \hat{C}_2 \sin(\hat{k}_x x) \right] \left[ \hat{C}_3 \cos(\hat{k}_y y) + \hat{C}_4 \sin(\hat{k}_y y) \right]. \quad (77)$$

Debemos encontrar ahora las condiciones de frontera que debe cumplir esta componente del campo magnético. Para hacer esto, consideremos que en las paredes de la guía de onda que están situadas en  $y = 0$  e  $y = b$ , la componente del campo eléctrico a lo largo del eje  $x$  debe anularse,  $\hat{E}_x^\pm = 0$ , ya que el campo tiene que ser normal a esta superficie. A su vez, sobre las paredes situadas en  $x = 0$  y  $x = a$ , se debe cumplir que  $\hat{E}_y^\pm = 0$ . De esta forma, considerando las ecuaciones (34) y (35), vemos que las condiciones de frontera para la componente  $z$  del campo magnético son

$$\left. \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{para } y \in [0, b] \quad (78)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad \text{para } y \in [0, b] \quad (79)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{para } x \in [0, a] \quad (80)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{H}_z^\pm}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad \text{para } x \in [0, a]. \quad (81)$$

Aplicando estas condiciones a (77) obtenemos una solución particular de la forma

$$\boxed{\hat{H}_z^\pm(x, y) = \hat{H}_{z,mn}^\pm \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \text{con } m, n = 0, 1, 2, 3, \dots} \quad (82)$$

Como esta ecuación depende de los parámetros  $m$  y  $n$ , se dice que pertenece al modo  $\text{TE}_{mn}$ . Notemos que a diferencia de los que sucede en el modo  $\text{TM}_{mn}$ , aquí los parámetros  $m$  y  $n$  puede

ser cero, pero no simultáneamente. Es decir, existe una solución no trivial para  $m = 1$  y  $n = 0$ , o para  $m = 0$  y  $n = 1$ , pero no para  $m = n = 0$ .

El resto de las componentes para modo  $\text{TE}_{mn}$  pueden calcularse usando las ecuaciones (34-37). De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{E}_x^\pm(x, y) &= \left[ \frac{j\omega\mu}{\hat{k}_c^2} \frac{n\pi}{b} \hat{H}_{z,mn}^\pm \right] \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &= \hat{E}_{x,mn}^\pm \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\end{aligned}\quad (83)$$

$$\begin{aligned}\hat{E}_y^\pm(x, y) &= \left[ -\frac{j\omega\mu}{\hat{k}_c^2} \frac{m\pi}{a} \hat{H}_{z,mn}^\pm \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &= \hat{E}_{y,mn}^\pm \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\end{aligned}\quad (84)$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_x^\pm(x, y) &= \left[ \pm \frac{\gamma_{mn}}{\hat{k}_c^2} \frac{m\pi}{a} \hat{H}_{z,mn}^\pm \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &= \hat{H}_{x,mn}^\pm \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\end{aligned}\quad (85)$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_y^\pm(x, y) &= \left[ \pm \frac{\gamma_{mn}}{\hat{k}_c^2} \frac{n\pi}{b} \hat{H}_{z,mn}^\pm \right] \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &= \hat{H}_{y,mn}^\pm \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\end{aligned}\quad (86)$$

en donde

$$\hat{k}_c^2 \equiv \gamma_{mn}^2 + \omega^2\mu\epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (87)$$

De esta forma la constante de propagación para este modo será

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] - \omega^2\mu\epsilon}. \quad (88)$$

Notemos que esta ecuación es idéntica a (67) la cual fue obtenida para el modo TM, e implica la existencia de una frecuencia de corte dada por

$$f_{c,mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad (89)$$

que es igual a (69). De esta forma, sólo para  $f > f_{c,mn}$  una onda electromagnética podrá propagarse en el modo  $\text{TE}_{mn}$ . La longitud de onda y la velocidad de fase para este modo también son iguales a las obtenidas para el modo  $\text{TM}_{mn}$ , ecuaciones (72) y (73). Sin embargo, como la impedancia intrínseca para el modo  $\text{TE}_{mn}$  es diferente y está dada por la ecuación (38), para  $f > f_{c,mn}$  obtenemos

$$\hat{\eta}_{\text{TE},mn} = \frac{j\omega\mu}{j\beta_{mn}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}} \quad f > f_{c,mn}, \quad (90)$$

donde como antes  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ .

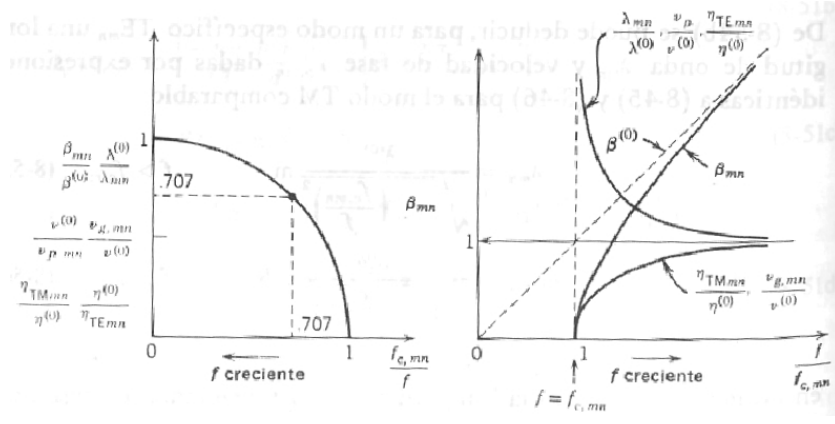


Figura 3: (a)[Izquierda] Diagrama de círculo universal y (b)[Derecha] cantidades para los modos TM y TE graficadas contra la frecuencia.

## 5. Frecuencia de corte y modo dominante

Como hemos visto en las dos secciones anteriores, la constante de propagación, la longitud de onda, la velocidad de fase y la impedancia intrínseca para los modos TM y TE, dependen de la frecuencia de corte. Como las expresiones para estas cantidades contiene un factor común  $\sqrt{1 - (f_{c,mn}/f)^2}$ , es usual graficarlas mediante un **diagrama de círculo universal**. Por ejemplo, para ambos modos, el factor de fase para  $f > f_{c,mn}$  está dado por

$$\beta_{mn} = \beta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}, \quad (91)$$

ecuación que puede reescribirse como

$$\left(\frac{\beta_{mn}}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2 = 1. \quad (92)$$

Considerando a  $f_{c,mn}/f$  y  $\beta_{mn}/\beta$  como, respectivamente, las abscisa y la ordenada de un sistema de ejes cartesianos, vemos que la función anterior es la ecuación de un círculo. La figura 3 (a) muestra todas las cantidades que pueden representarse en el diagrama de círculo universal. Vemos por ejemplo que si la frecuencia es cercana a la crítica,  $f \gtrsim f_{mn}$ , entonces  $\beta_{mn} \approx 0$  y  $v_{p,mn} \rightarrow \infty$  (este comportamiento no físico será discutido en la siguiente sección). Por otro lado, cuando  $f \rightarrow \infty$ , todas las cantidades tienen al valor que tendrían para una onda plana que se propaga en un medio no limitado con parámetros  $\mu$  y  $\epsilon$ . La figura 3 (b) representa estas mismas cantidades pero contra la frecuencia normalizada.

Como vimos anteriormente, la expresión de la frecuencia de corte para ambos modos es la misma, pero los parámetros  $m$  y  $n$  tienen rangos diferentes. De esta forma para una guía de onda particular, siempre los modos TE con  $m = 1$  y  $n = 0$ , y  $m = 0$  y  $n = 1$  serán los de menor frecuencia de corte. Si  $a > b$ , el **modo dominante** (el de menor frecuencia de corte) será el  $TE_{10}$  y su frecuencia de corte (89) estará dada por

$$f_{c,10} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\pi}{a} = \frac{v_p}{2a}. \quad (93)$$

A ésta frecuencia, el ancho mayor de la sección transversal es igual a la mitad de la longitud de onda que correspondería a la propagación en una región no limitada,  $a = \lambda/2$ . Como muestra

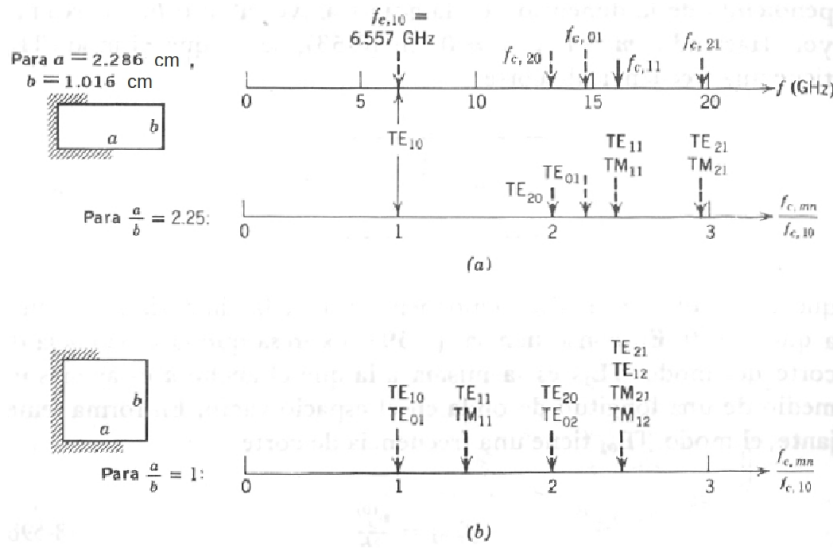


Figura 4: Frecuencias de corte para los modos TM y TE de menor orden para guías de onda de sección transversal (a) rectangular con  $a/b = 2,25$  y (b) cuadrada.

la figura 4 (a), en una guía de onda de  $a = 2,286$  [cm] por  $b = 1,016$  [cm] llena de aire, la frecuencia de corte es de  $f_{c,10} = 6,557$  [GHz] y cae dentro de la banda X de microondas (la cual está entre los 8,2 y los 12,4 [GHz]). El resto de los modos tienen una frecuencia de corte mayor y muchos de ellos coinciden.

Por otro lado, si la sección transversal de una guía de ondas hueca es cuadrada, los modos  $TE_{10}$  y  $TE_{01}$  serán equivalentes. La figura 4 (b) muestra que en general, las frecuencias de corte coinciden para los modos con  $TM_{ij} = TM_{ji} = TE_{ij} = TE_{ji}$ . El uso de una guía de este tipo no es deseable ya que no permite un control estricto de la polarización del campo. Observando las figuras 5 (a) y (b) podemos deducir por qué esto es así. Cada uno de los modos  $TE_{10}$  y  $TE_{01}$  poseen polarizaciones bien definidas que son perpendiculares entre sí. En una guía de onda con sección transversal rectangular, si se genera una señal que esté por arriba de la frecuencia de corte dominante (pero debajo de la frecuencia de corte del siguiente modo), esta se propagará en el modo  $TE_{10}$  con una polarización bien definida. De esta forma, un receptor en el otro extremo podrá captar la onda sin mayores problemas. Por otro lado, si la guía tiene una sección transversal cuadrada, los campos producidos por dicha señal serán una combinación lineal de las soluciones para los modos  $TE_{10}$  y  $TE_{01}$ . Debido a la simetría entre estos dos modos, en la práctica la polarización cambiará aleatoriamente y la señal no podrá ser captada fácilmente por el receptor.

Puesto que en la práctica las señales se envían en el modo dominante  $TE_{10}$ , escribimos a continuación las expresiones para dichos campos

$$\hat{E}_x^\pm = 0 \quad (94)$$

$$\hat{E}_y^\pm(x) = \left[ -\frac{j\omega\mu a}{\pi} \hat{H}_{z,10}^\pm \right] \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) = \hat{E}_{y,10}^\pm \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (95)$$

$$\hat{H}_x^\pm(x) = \left[ \pm \frac{j\beta_{10}a}{\pi} \hat{H}_{z,10}^\pm \right] \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) = \hat{H}_{x,10}^\pm \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (96)$$

$$\hat{H}_y^\pm = 0 \quad (97)$$

$$\hat{H}_z^\pm(x) = \hat{H}_{z,10}^\pm \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right). \quad (98)$$

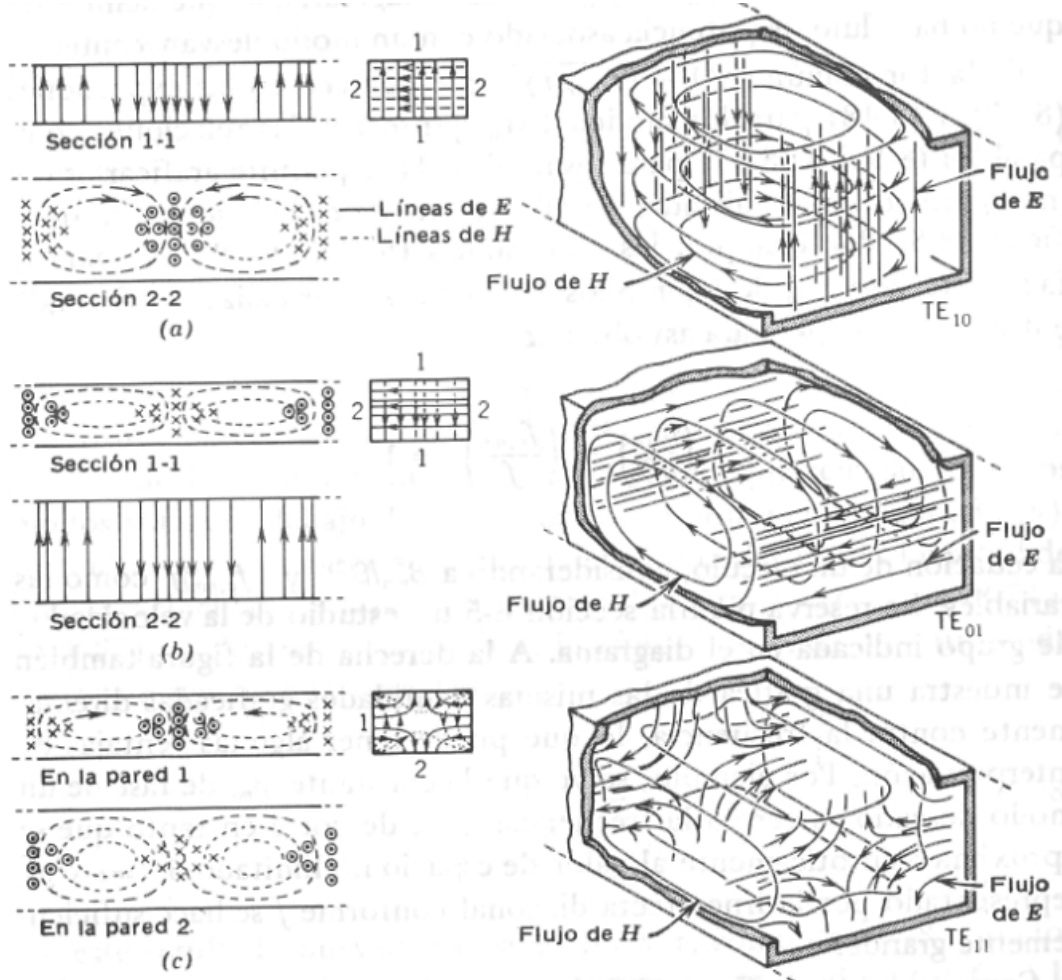


Figura 5: Líneas de flujo de los campos electromagnéticos en una guía de onda hueca rectangular, para los modos (a)  $TE_{10}$ , (b)  $TE_{01}$  y (c)  $TE_{11}$ .

Observemos que sólo tres de las amplitudes,  $\hat{E}_y^\pm$ ,  $\hat{H}_x^\pm$  y  $\hat{H}_z^\pm$  son diferentes de cero, y además dependen únicamente de la variable  $x$ . Multiplicando las ecuaciones anteriores por  $e^{j(\omega t \mp \beta_{10} z)}$  y luego tomando la parte real, obtenemos las expresiones reales de los campos

$$E_y^\pm(x, z, t) = E_{y,10}^\pm \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t \mp \beta_{10}z + \phi_{10}^\pm) \quad (99)$$

$$H_x^\pm(x, z, t) = \mp \frac{E_{y,10}^\pm}{\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t \mp \beta_{10}z + \phi_{10}^\pm) \quad (100)$$

$$H_z^\pm(x, z, t) = -\frac{E_{y,10}^\pm}{2a\eta} \lambda \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t \mp \beta_{10}z + \phi_{10}^\pm). \quad (101)$$

Aquí  $\phi_{10}^\pm$  denota un ángulo de fase arbitrario. Notemos que todas estas ecuaciones están expresadas en función de la amplitud del campo eléctrico  $E_{y,10}^\pm$ , la impedancia intrínseca de onda  $\eta$  y la longitud de onda  $\lambda$ .

## 6. Dispersión en guías de ondas

Una de las características de las guías de onda huecas es que, aunque se las considere construida con materiales ideales (dieléctrico sin pérdidas y paredes con conductividad infinita), constituyen medios de propagación dispersivos. Tanto para los modos TM como TE, la velocidad de fase dada por (73),

$$v_{p,mn} = \frac{v_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}}, \quad (102)$$

depende de la frecuencia  $f$ . Esto implica que al enviar una señal real, cada una de sus componentes de Fourier se propagará a diferente velocidad deformando el paquete de ondas. Este fenómeno puede producir la pérdida de la información que portaba la señal.

Por otro lado, al examinar la expresión (102), vemos que la velocidad de fase excede a la de la luz del medio en el cual se propaga. Esto nos es un inconveniente físico pues, como hemos visto antes, la velocidad a la cual se propaga la energía y la información es la velocidad de

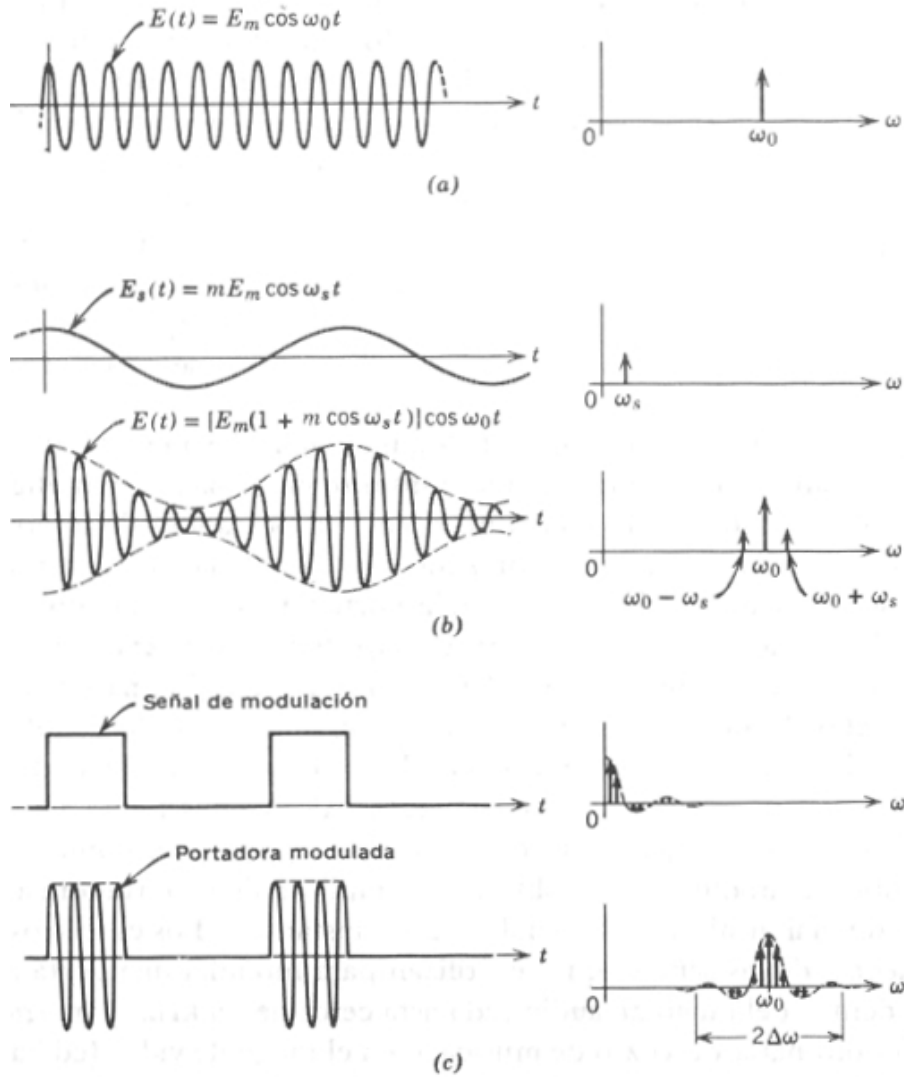


Figura 6: Diferentes ondas y sus correspondientes espectros de Fourier.

grupo dada por

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}. \quad (103)$$

Analizaremos a continuación qué sucede cuando una señal real es transmitida en el modo dominante de una guía de onda hueca.

Para empezar, consideremos la forma en que se transmite información mediante señales electromagnéticas. Las figuras 6 (a) y 6 (b) [parte superior] muestran dos señales puras de frecuencias  $f_0$  y  $f_s$ , y a su lado el espectro de Fourier correspondiente (en la figura se indican las frecuencias angulares  $\omega_0$  y  $\omega_s$ ). Estas funciones temporales podrían representar a alguna de las componentes de los campo para un punto fijo del espacio. Supongamos ahora una situación en la cual se tiene que  $f_0 > f_c$  y  $f_s < f_c$ , donde  $f_c$  es la frecuencia de corte del modo dominante de una determinada guía de onda. En este caso sólo la señal de frecuencia  $f_0$  podrá propagarse en este medio de transmisión. La onda de menor frecuencia  $f_s$  no se transmitirá pues constituye un modo desvaneciente. Típicamente esta última contiene la información que se requiere transmitir pues, por ejemplo, podría representar una señal de audio cuyo rango que va de los 20 [Hz] a los 20 [KHz]. Este rango está muy por debajo de la frecuencia de corte de una guía de onda estándar.

Para transmitir señales de baja frecuencia usando un medio de transmisión que posee una frecuencia de corte muy grande, se usa un proceso conocido como **modulación**. Éste consiste en generar una onda de alta frecuencia denominada **portadora** (la cual podrá transmitirse), modulada en amplitud (AM) o frecuencia (FM) por la señal que contiene la información. La figura 6 (b) [parte inferior], muestra un ejemplo en el cual la onda de frecuencia  $f_0$  ha sido modulada en amplitud por la de frecuencia  $f_s$ . Como el espectro de Fourier de esta nueva señal estará localizado en torno a  $\omega_0$ , la frecuencia angular de la onda portadora, dicha señal podrá ser transmitida a lo largo del medio de transmisión. La figura 6 (c), muestra otro ejemplo en el cual la portadora ha sido modulada por una señal de pulsos de baja frecuencia. En este caso, el ancho de banda necesario para transmitir dicha señal será mayor (ver espectro de Fourier en dicha figura).

Para formalizar matemáticamente el razonamiento anterior, supongamos que el campo eléctrico real de una onda portadora que se propaga en un medio de transmisión en el sentido positivo de  $z$ , está dado por

$$E_0^+(z, t) = E_m^+ \cos(\omega_0 t - \beta_0 z), \quad (104)$$

mientras que el de la señal de menor frecuencia es

$$E_s^+(z, t) = m \cos(\omega_s t - \beta_s z). \quad (105)$$

La portadora puede ser modulada en amplitud de la siguiente forma

$$E(z, t) = (1 + E_s^+) E_0^+ = [1 + m \cos(\omega_s t - \beta_s z)] E_m \cos(\omega_0 t - \beta_0 z), \quad (106)$$

donde a la constante  $m$  se la conoce como factor de modulación. En las expresiones anteriores,  $\beta_0$  y  $\beta_s$  son las constantes de fase correspondientes a las frecuencias angulares  $\omega_0$  y  $\omega_s$ , respectivamente. Usando la identidad  $\cos A \cos B = (1/2)[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$ , la ecuación anterior se puede reescribir como

$$E(z, t) = E_m \cos(\omega_0 t - \beta_0 z) + \frac{m E_m}{2} \cos(\omega_+ t - \beta_+ z) + \frac{m E_m}{2} \cos(\omega_- t - \beta_- z), \quad (107)$$

donde  $\omega_{\pm} = (\omega_0 \pm \omega_s)$  y  $\beta_{\pm} = (\beta_0 \pm \beta_s)$ . Como podemos apreciar, ésta es una serie de Fourier (finita) de tres términos los cuales, si  $\omega_s \ll \omega_0$ , están contenidos en una ancho de banda muy estrecho.

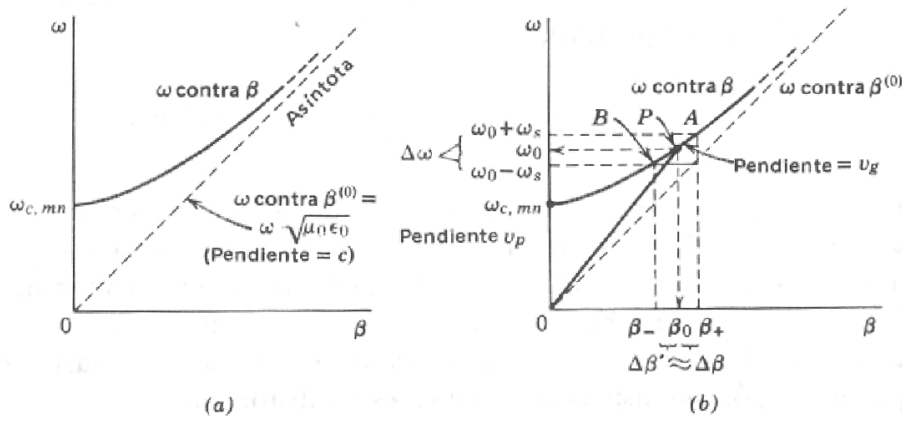


Figura 7: Diagrama de  $\omega$  vs  $\beta$  para el modo  $TE_{10}$  de una guía de onda hueca rectangular.

Si el medio de transmisión que usamos no es dispersivo (vacío o aire, por ejemplo), entonces cada uno de los términos de la onda (107) se propagará a la misma velocidad. Esto se puede constatar reescribiendo dicha señal como

$$E(z, t) = E_m \cos [\omega_0(t - z/v_p)] + \frac{mE_m}{2} \cos [\omega_+(t - z/v_p)] + \frac{mE_m}{2} \cos [\omega_-(t - z/v_p)], \quad (108)$$

donde hemos considerado que  $\beta = \omega/v_p$  y que la velocidad de fase  $v_p$  es independiente de la frecuencia. Por lo tanto, la envolvente también se moverá a esta velocidad y tendremos que  $v_g = v_p$ .

Por otro lado, si el medio es dispersivo, entonces la velocidad de propagación dependerá de la frecuencia. La figura 7 (a) muestra un diagrama de  $\omega$  vs  $\beta$  para el modo  $TE_{10}$  de una guía de onda hueca rectangular. Si la onda (107) se propaga en este medio, cada uno de sus términos tendrá una velocidad de fase dada por (102) que incluso, si la frecuencia es cercana a la de corte, podrá ser infinita. Sin embargo, la envolvente de este conjunto se moverá a la velocidad de grupo (103). Gráficamente, si  $\omega_s \ll \omega_0$ , esta velocidad será equivalente a la pendiente de la tangente en el punto P mostrada en la figura 7 (b). Observando dicha figura, es fácil constatar que a cualquier frecuencia,  $v_g < v_{p,mn}$ . A partir de (103) y de la relación

$$\beta_{mn} = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_{c,mn}}{\omega} \right)^2}, \quad (109)$$

válida tanto para los modos TM y TE, calculamos la velocidad de grupo para guías de ondas huecas como

$$v_{g,mn} = \left( \frac{\partial \beta_{mn}}{\partial \omega} \right)^{-1} = v_p \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_{c,mn}}{\omega} \right)^2}, \quad (110)$$

donde  $v_p$  es la velocidad de fase para un medio no limitado con parámetros  $\mu$  y  $\epsilon$ .

## Referencias

- [1] Carl T. A. Johnk, **Teoría electromagnética. Campos y ondas**. Limusa (1999).
- [2] Leonard Eyges, **The classical electromagnetic field**. Dover (1972).
- [3] John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W. Christy, **Fundamentos de la teoría electromagnética**. Addison-Wesley (1984).

- [4] John D. Jackson, **Classical Electrodynamics**. John Wiley and Sons (1999).
- [5] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, **Solid State Physics**. Cornell University (1976).
- [6] David J. Griffiths, **Introduction to Electrodynamics**. Prentice Hall (1999).
- [7] M. I. Prieto and M. Quintillán, Am. J. Phys. **57**, 277 (1989).
- [8] J. L. Volakis, A. Chatterjee and L. C. Kempel, **Finite Element Method for Electromagnetics**. IEEE Press (1998).
- [9] S. J. Orfanidis, **Electromagnetic Waves and Antennas**. Rutgers University (1999).

# Problemas

1. Una guía de onda hueca que está llena de aire, tienen una sección rectangular de  $a = 2,286$  [cm] por  $b = 1,016$  [cm]. Determinar las siguientes cantidades si opera en el modo  $TM_{11}$  a una frecuencia de 20 [GHz]:
  - a) La frecuencia de corte para este modo.
  - b) La constante de fase  $\beta_{11}$ .
  - c) La longitud de onda  $\lambda_{11}$
  - d) Las velocidades de fase y de grupo.
  - e) La impedancia intrínseca de onda  $\eta_{11}$ .
  - f) La constante de propagación a 10 [GHz].
  - g) Calcular las cantidades anteriores suponiendo que el dieléctrico tiene una permitividad de  $\epsilon = 3\epsilon_0$ .
2. Dadas las siguientes guías de onda rectangulares llenas de aire, calcular sus frecuencias de corte para el modo dominante:
  - a) Dimensiones  $15,875$  [cm]  $\times$   $8,255$  [cm] (banda L).
  - b) Dimensiones  $7,214$  [cm]  $\times$   $3,404$  [cm] (banda S).
  - c) Dimensiones  $4,755$  [cm]  $\times$   $2,215$  [cm] (banda C).
  - d) Dimensiones  $2,286$  [cm]  $\times$   $1,016$  [cm] (banda X).
  - e) Dimensiones  $1,067$  [cm]  $\times$   $0,533$  [cm] (banda K).
  - f) Dimensiones  $0,376$  [cm]  $\times$   $0,188$  [cm] (banda V).
3. Para cada una de las guías del punto anterior, determinar el modo cuya frecuencia de corte sea la más cercana al modo dominante. A partir de esta información, especificar en cada caso el rango de frecuencia en el cual cada guía opera en el modo dominante.
4. En una guía de dimensiones  $2,286$  [cm]  $\times$   $1,016$  [cm] llena de aire, se envía una señal de 10 [GHz] cuyo campo eléctrico tiene una amplitud de 100 [V/m]. Determinar las componentes del campo magnético complejo  $\hat{\mathbf{H}}$ .
5. Las guías de onda no son adecuadas para operar a frecuencias inferiores a 1 [GHz]. Para las siguientes frecuencias, determinar el ancho  $a$  que debería tener una guía de onda rectangular llena de aire, para operar a una frecuencia cercana a la del modo dominante:
  - a) 10 [GHz].
  - b) 100 [MHz].
  - c) 10 [MHz].
  - d) 50 [Hz].
6. Indicar las dificultades o problemas (si los hay) que surgirán al intentar transmitir por una guía de onda rectangular llena de aire, una señal bajo las siguientes condiciones (suponga que  $a$  y  $b$  son las dimensiones a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente):
  - a) Señal de frecuencia 1 [GHz], con el campo eléctrico polarizado a lo largo del eje  $y$ , en una guía de  $7,214$  [cm]  $\times$   $3,404$  [cm].

- b) Señal de frecuencia 80 [GHz], con el campo eléctrico polarizado a lo largo del eje  $x$ , en una guía de  $0,376 \text{ [cm]} \times 0,188 \text{ [cm]}$ .
  - c) Señal de frecuencia 20 [GHz], con el campo eléctrico polarizado a lo largo del eje  $y$ , en una guía de  $1,067 \text{ [cm]} \times 0,533 \text{ [cm]}$ .
  - d) Señal de frecuencia 10 [GHz], con el campo eléctrico polarizado a lo largo del eje  $x$ , en una guía de  $2,286 \text{ [cm]} \times 1,016 \text{ [cm]}$ .
7. Calcular las velocidades de fase y de grupo para una portadora modulada en una banda muy estrecha, que se propaga en una guía de onda rectangular llena de aire, en el modo dominante  $\text{TE}_{10}$  a frecuencias:
- a)  $f = 1,1f_{c,10}$ .
  - b)  $f = 2f_{c,10}$ .
  - c)  $f = 10f_{c,10}$ .
  - d)  $f = 100f_{c,10}$ .
8. Un transmisor de microondas genera una señal de frecuencia  $f = 5 \text{ [GHz]}$  que es inyectada en una guía de onda hueca de sección transversal rectangular llena de aire, cuyas dimensiones son  $a = 7,214 \text{ [cm]}$  y  $b = 3,404 \text{ [cm]}$ . a) ¿Esta onda se puede propagar?. b) ¿En qué modo/s?. c) ¿Hay alguna restricción para elegir la polarización de esta señal?. Justifique sus respuestas.
9. Una guía de onda hueca de sección rectangular que está llena con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon = 4\epsilon_0$  y permeabilidad  $\mu = \mu_0$ , puede operar en el modo dominante en un rango de frecuencias que va de 1 [GHz] hasta 1,5 [GHz]. Determinar las dimensiones de la sección transversal de la guía suponiendo que el modo de propagación que está por arriba del dominante es el  $\text{TE}_{01}$ .
10. Una guía de onda hueca llena de aire tiene una sección transversal rectangular de dimensiones  $a \times b$ , con  $a > b$ . Sabiendo que  $a = 3 \text{ [cm]}$ , determinar los valores mínimo y máximo que debería tener  $b$  para que  $f_{c,20} \geq f_{c,01} \geq f_{c,10}$ .
11. Se desea diseñar una guía de onda hueca de sección transversal rectangular llena de aire, para que transmita una señal de  $f = 6 \text{ [GHz]}$  en el modo dominante. Determinar las dimensiones de la sección transversal que debería tener esta guía, suponiendo que el modo de propagación que está por arriba del dominante es el  $\text{TE}_{01}$  y que la frecuencia de la señal  $f$  cae justo en el medio del “ancho de banda” que va entre  $\text{TE}_{10}$  y  $\text{TE}_{01}$ , siendo este ancho de banda de 1 [GHz].