

Unidad 2

Ecuaciones de Maxwell

9 de abril de 2018

1. Ecuaciones de Maxwell para el espacio vacío

1.1. Cargas eléctricas

La materia está constituida por diferentes tipos de partículas elementales, algunas de las cuales poseen una carga eléctrica positiva o negativa. Dos postulados importantes surgen de la observación experimental:

- En un sistema aislado **la carga eléctrica total se conserva**.
- **La carga eléctrica está cuantizada** en múltiplos enteros de la carga electrónica $e = 1,6 \times 10^{-19}$ [C].

Si bien la carga eléctrica es discreta, se define la densidad volumétrica de carga como

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v}, \quad (1)$$

donde Δq es la cantidad de carga contenida en el volumen Δv . Aunque en la práctica consideraremos válido tomar el límite $\Delta v \rightarrow 0$, debemos tener en cuenta que este no puede disminuir a un valor tal que contenga sólo un número muy pequeño de cargas, pues de esa forma se manifestarían las fluctuaciones atómicas y evidentemente la densidad ya no podría considerarse una función continua. En forma análoga, si la carga está distribuida en una superficie o en una línea, se definen las densidades correspondientes como

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \quad (2)$$

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}. \quad (3)$$

Para representar matemáticamente la “distribución volumétrica” de una carga puntual, o a una distribución superficial o lineal de carga, es útil introducir la **función delta de Dirac**. En una dimensión y para un determinado punto x_0 , esta función se expresa como $\delta(x - x_0)$ y se define mediante las siguientes propiedades:

1)

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = 1 \quad \text{si } x_0 \in [a, b] \quad (4)$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = 0 \quad \text{si } x_0 \notin [a, b] \quad (5)$$

2)

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0) dx = f(x_0) \quad \text{si } x_0 \in [a, b] \quad (6)$$

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0) dx = 0 \quad \text{si } x_0 \notin [a, b] \quad (7)$$

En otras palabras, se puede decir que la delta de Dirac es una función de muestreo para $f(x)$. Para 3 dimensiones la delta de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ cumple con

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = 1 \quad \text{si } V \text{ contiene a } \mathbf{r}_0 \quad (8)$$

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = 0 \quad \text{si } V \text{ no contiene a } \mathbf{r}_0 \quad (9)$$

y

$$\int_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = f(\mathbf{r}_0) \quad \text{si } V \text{ contiene a } \mathbf{r}_0 \quad (10)$$

$$\int_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = 0 \quad \text{si } V \text{ no contiene a } \mathbf{r}_0. \quad (11)$$

Para los tres sistemas principales de coordenadas ortogonales se puede demostrar que

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \quad (\text{Cartesianas}) \quad (12)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\rho}\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)\delta(z - z_0) \quad (\text{Circulares cilíndricas}) \quad (13)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta}\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\phi - \phi_0) \quad (\text{Esféricas}). \quad (14)$$

Para una carga puntual q situada en $\mathbf{r}_0$ representamos su densidad volumétrica como

$$\rho_v(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (15)$$

y usando las propiedades de la delta de Dirac podemos probar que

$$q = \int_V \rho_v(\mathbf{r}) dv \quad \text{si } V \text{ contiene a } \mathbf{r}_0. \quad (16)$$

Otro ejemplo (en coordenadas cartesianas) es una carga q distribuida uniformemente sobre un plano rectangular situado a z_0 constante y con dimensiones Δx y Δy . En este caso la densidad volumétrica de esta distribución superficial estará dada por

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \frac{q}{\Delta x \Delta y}\delta(z - z_0). \quad (17)$$

Por otro lado, si la carga se distribuye uniformemente a lo largo de un segmento de longitud Δz paralelo al eje z que atraviesa el punto (x_0, y_0) , entonces

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \frac{q}{\Delta z}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0). \quad (18)$$

En ambos casos, integrando en todo el espacio (integral de volumen) se obtiene como resultado q . Notar que para describir las densidades superficial y lineal en estos dos últimos ejemplos, no es necesario utilizar la función delta de Dirac pues $\rho_s = \frac{q}{\Delta x \Delta y}$ y $\rho_l = \frac{q}{\Delta z}$, respectivamente.

1.2. Fuerza de Lorentz

La fuerza $\mathbf{F}_E$ (repulsiva o atractiva) que ejerce una carga puntual Q sobre otra carga puntual q viene dada por la **ley de Coulomb**

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{a}_R \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (19)$$

donde R es la distancia de separación entre ambas cargas, $\mathbf{a}_R$ es un vector unitario dirigido de Q a q y $\epsilon_0 \cong 10^{-9}/36\pi$ [F/m] es una constante llamada **permitividad del espacio vacío**. Debemos destacar que (19) sigue una ley en la cual la fuerza se atenúa con la inversa del cuadrado de la distancia. Otra forma de tratar con el mismo problema, consiste en definir la intensidad de **campo eléctrico** $\mathbf{E}$ producido por la carga puntual Q en el punto del espacio que ocupa q como

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (20)$$

Este campo generado por Q llena todo el espacio. Tomando en cuenta las ecuaciones (19) y (20) podemos comprobar que la carga de prueba q experimentará una fuerza

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}. \quad (21)$$

De esta forma en lo que sigue, en lugar de referirnos a las fuerzas que se ejercen mutuamente conjuntos o distribuciones de carga, nos enfocaremos en el campo eléctrico producido por las mismas.

Otro campo, denominado **campo magnético** $\mathbf{B}$ o densidad de flujo magnético, también es capaz de afectar el estado de movimiento de una carga puntual. La fuerza que experimenta una carga de prueba q que se mueve a una velocidad $\mathbf{v}$ está dada por

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (22)$$

La ley de **Fuerzas de Lorentz** se obtiene sumando las dos contribuciones (21) y (22)

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}. \quad (23)$$

Notemos que la fuerza $\mathbf{F}_E$ tiene la misma dirección que el campo eléctrico $\mathbf{E}$, mientras que $\mathbf{F}_B$ es perpendicular tanto a la velocidad $\mathbf{v}$ como al campo magnético $\mathbf{B}$.

1.3. Ley de Gauss para campos eléctricos

La **ley de Gauss para campos eléctricos** establece que el flujo total de $\mathbf{E}$ a través de una superficie cerrada S que limita a un volumen V , es proporcional a la carga q encerrada por esta superficie

$$\boxed{\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_v dv = q}, \quad (24)$$

donde ρ_v es la densidad de carga eléctrica por unidad de volumen. La expresión anterior es válida para el campo eléctrico en el *espacio vacío*, en el cual sólo están presentes distribuciones de carga eléctrica estáticas o en movimiento (la expresión “espacio vacío” se refiere a que no están presentes materiales dieléctricos o magnéticos). Un concepto importante es que la ley de Gauss debe cumplirse para todas las superficies cerradas que sea posible construir entorno a q .

Las aplicaciones prácticas de (24) se limitan a casos en los cuales hay simetría. Consideremos por ejemplo el caso de una distribución lineal uniforme de carga ρ_l de longitud infinita como

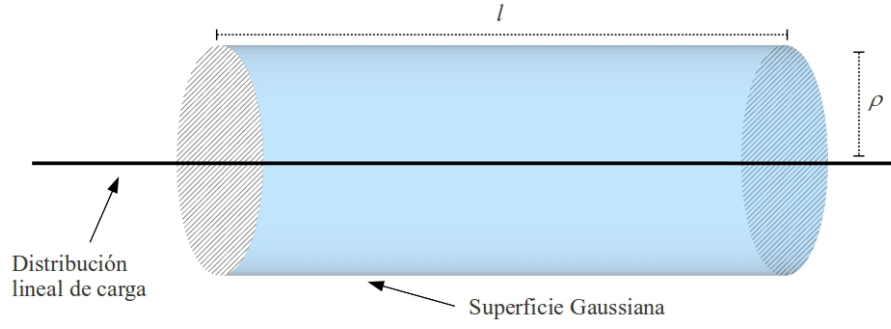


Figura 1: Superficie Gaussiana cilíndrica de longitud l y radio ρ , que rodeando a un segmento finito perteneciente a una distribución lineal uniforme de carga eléctrica.

se muestra en la figura 1. Debido a un criterio de simetría, es posible demostrar que el campo eléctrico tendrá una única componente $\mathbf{E} = \mathbf{a}_\rho E_\rho$. Si elegimos como **superficie Gaussiana** a un cilindro cerrado de longitud l y radio ρ cuyo eje coincide con la distribución de carga, entonces el campo eléctrico radial tendrá una magnitud constante sobre su superficie periférica. Aplicando la ley de Gauss (24) obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_S \epsilon_0 \mathbf{a}_\rho E_\rho \cdot \mathbf{a}_\rho ds &= \int_l \rho_l dl \\ \epsilon_0 E_\rho 2\pi \rho l &= \rho_l l, \end{aligned} \quad (25)$$

donde podemos apreciar que la contribución al flujo de las tapas del cilindro es cero (el campo eléctrico es tangente a estas superficies) y, debido al tipo de distribución considerada, la carga total se ha representado por una integral de línea. Reescribiendo la ecuación anterior (y considerando que el campo es radial) podemos obtener una expresión para el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho}. \quad (26)$$

Por otro lado, notemos que para el caso de una carga puntual Q , eligiendo una superficie Gaussiana esférica centrada en el punto ocupado por dicha carga (por simetría el campo debe ser radial), es posible obtener mediante la ley de Gauss la expresión para el campo eléctrico (20).

Finalmente, usando el teorema de la divergencia en la integral de superficie del lado izquierdo de la ecuación (24) obtenemos

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) dv = \int_V \rho_v dv. \quad (27)$$

Como las dos últimas integrales son válidas para volúmenes de cualquier tamaño y forma, se deduce que los integrandos deben ser iguales

$$\boxed{\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v}. \quad (28)$$

La expresión anterior es conocida como la **forma diferencial de la ley de Gauss para campos eléctricos** y es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell para el espacio vacío.

1.4. Ley de Gauss para campos magnéticos

La **ley de Gauss para campos magnéticos** establece que el flujo total de $\mathbf{B}$ a través de cualquier superficie cerrada S siempre es cero

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (29)$$

Esto se debe a que las líneas de flujo del campo magnético se cierran sobre si mismas ya que no existen carga magnéticas o monopolos magnéticos.

Al igual que en la sección anterior, usando el teorema de la divergencia podemos obtener la expresión diferencial correspondiente

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (30)$$

1.5. Ley de Ampère

En el espacio vacío los campos magnéticos son originados tanto por campos eléctricos que varían en el tiempo como por cargas en movimiento. Entonces es útil definir el vector **densidad de corriente** $\mathbf{J}$ como

$$\mathbf{J} \equiv \rho_v \mathbf{v}. \quad (31)$$

En la expresión anterior $\mathbf{v}(u_1, u_2, u_3, t)$ es la velocidad promedio de las cargas dentro de un volumen diferencial dv en el entorno del punto $P(u_1, u_2, u_3)$.

En el espacio vacío, los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ están relacionados a través de la **ley de Ampère**

$$\oint_l \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s}, \quad (32)$$

donde l representa un camino cerrado que limita a S y la constante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] es la **permeabilidad del espacio vacío**. Esta identidad es otra de las leyes integrales de Maxwell. Por convención, la regla de la mano derecha es empleada para elegir la orientación de $d\mathbf{s}$ y el sentido positivo de integración con el que se calcula la circulación del lado izquierdo de (32).

Para comprender mejor la expresión (32) la reescribimos como

$$\oint_l \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = i + \frac{d\Phi_E}{dt}, \quad (33)$$

donde i es la corriente eléctrica total y Φ_E el flujo neto del campo $\epsilon_0 \mathbf{E}$ que atraviesan la superficie S . La variación temporal de Φ_E se denomina **corriente de desplazamiento**. En definitiva la ley de Ampère nos dice que, en el vacío, la circulación del campo magnético $\mathbf{B}$ a lo largo de la trayectoria cerrada l , es igual a la corriente total (la corriente de convección i mas la de desplazamiento $\frac{d\Phi_E}{dt}$) que atraviesa la superficie S limitada por l .

La necesidad de introducir el concepto de corriente de desplazamiento se puede justificar considerando los siguientes ejemplos. Primero supongamos que tenemos un cable metálico de longitud infinita que conduce una corriente estacionaria i (en este caso a i se la denomina corriente de conducción) como muestra la figura 2 (a). Si la corriente de desplazamiento es cero (el campo eléctrico es estacionario), podemos deducir usando la ley de Ampère (33) que el campo magnético fuera del cable será

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho}, \quad (34)$$

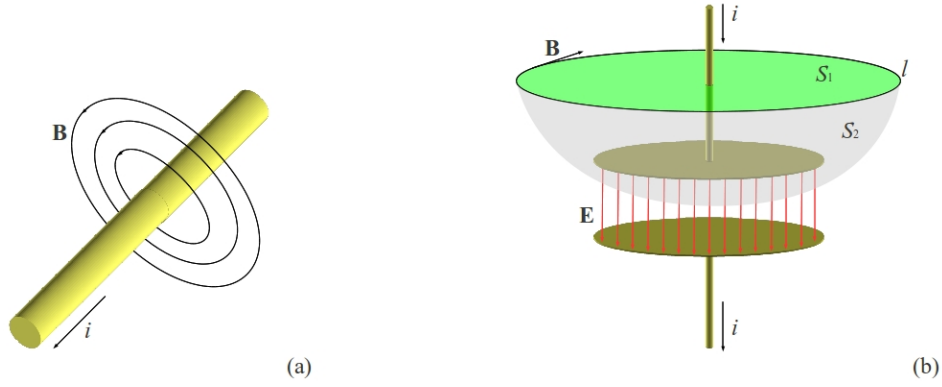


Figura 2: (a) A la izquierda se representa el campo magnético en torno a un cable lineal que conduce una corriente estacionaria i . (b) A la derecha se muestra un capacitor de placas paralelas que está siendo cargado por una corriente constante. Notar que las superficies S_1 y S_2 están limitadas por la misma trayectoria cerrada l .

donde, debido a la simetría cilíndrica del problema, se ha realizado la integral de línea a lo largo de un círculo centrado en el conductor (considere que el conductor coincide con el eje z y que la corriente se traslada en el sentido negativo de esta variable). Notemos que la magnitud del campo se atenúa con una ley de inversa de la distancia radial.

Modifiquemos ahora el problema anterior introduciendo un capacitor de placas paralelas como se muestra en la figura 2 (b) (consideremos por simplicidad que no hay efectos de borde y por lo tanto el campo eléctrico entre las placas del capacitor es uniforme). Si tomamos la circulación entorno al cable y consideramos la corriente de conducción que atraviesa la superficie S_1 , el campo magnético estará dado nuevamente por (34). Por otro lado, observemos que la misma trayectoria cerrada l contiene la superficie S_2 , la cual sólo está atravesada por la corriente de desplazamiento originada en el capacitor (la corriente de conducción es cero entre las placas del capacitor). Usando la ley de Gauss (24) es fácil mostrar que esta corriente de desplazamiento es igual a i . Esto se logra suponiendo que el campo eléctrico es cero fuera del capacitor y que las placas están cargadas uniformemente. Entonces, tomando como superficie Gaussiana (cerrada) a $S = S_1 + S_2$ obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{S_2} (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{dq}{dt} = i, \quad (35)$$

ya que la integral sobre S_1 es cero. De esta forma, ya sea que se tome S_1 o S_2 , sigue siendo válido el resultado (34).

Originalmente la ley de Ampère se postuló sin tomar en cuenta la contribución de la corriente de desplazamiento, lo que lleva a una paradoja cuando se considera un problema como el anterior. La contribución más importante que hizo Maxwell al electromagnetismo fue la introducción de este nuevo término, lo que permitió unificar las teorías de electricidad y magnetismo así como predecir la existencia y propagación de ondas electromagnéticas en el vacío.

Finalmente, usando el teorema de Stokes, podemos escribir la **ley de Ampère en su forma diferencial** como

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t}, \quad (36)$$

donde la derivada total original se ha sustituido por una derivada parcial, pues el campo eléctrico depende tanto de variables espaciales como del tiempo. De hecho, notemos que en la expresión integral (32) se usa una derivada total ya que el flujo de campo eléctrico sólo depende de t .

1.6. Ley de Faraday

A la ecuación integral de Maxwell

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (37)$$

se le llama **ley de Faraday**. También se la conoce como la **ley de fuerza electromotriz inducida**, donde la integral de línea del lado izquierdo de (37) es la denominada fuerza electromotriz ε . Al igual que la ley de Ampère, la trayectoria l contiene a la superficie S a través de la cual se mide el flujo Φ_B . La ecuación (37) nos dice que un campo magnético que varía en el tiempo es capaz de inducir un campo eléctrico no conservativo (la circulación de $\mathbf{E}$ es diferente de cero). Este es el principio de funcionamiento de muchos dispositivos tecnológicos como los dínamos o los transformadores.

Si intercambiamos el rol de los campos eléctrico y magnético, las estructuras de las leyes (32) y (37) lucen similares. No obstante podemos observar dos diferencias muy importantes. En primer lugar en el lado derecho de la ley de Faraday no aparece ningún tipo de corriente de convección o conducción. Como hemos discutido anteriormente, esto se debe a que no existen carga magnéticas o monopolos magnéticos. Por otro lado, en la ecuación (37) aparece un signo negativo vinculando la circulación del campo eléctrico y el flujo magnético total. Esto indica que el campo eléctrico inducido se opone a la tendencia de la corriente a aumentar, lo que lleva al concepto de autoinductancia.

Nuevamente, usando el teorema de Stokes en la ecuación (37), podemos escribir la **ley de Faraday en forma diferencial**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (38)$$

1.7. Ecuación de continuidad

Debido al postulado de conservación de la carga, las corrientes eléctricas están relacionadas a las densidades de carga locales. Para ver esto tomemos la divergencia en ambos miembros de la ley de Ampère (36)

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial [\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E})]}{\partial t}. \quad (39)$$

Considerando ahora (28) y que la divergencia de un rotor siempre es cero, obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (40)$$

la cual se conoce como la **ecuación de continuidad**.

La ecuación (40) puede comprenderse mejor si la expresamos en forma integral. Integrando en un volumen V obtenemos

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv. \quad (41)$$

El lado izquierdo de esta expresión puede reescribirse como una integral de superficie usando el teorema de la divergencia, mientras que la integral del lado derecho es la carga total contenida dentro del volumen V al tiempo t

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dq}{dt}. \quad (42)$$

La relación anterior expresa el principio de conservación de la carga eléctrica: la integral de $\mathbf{J}$ cuantifica la cantidad de carga que escapa por unidad de tiempo a través de la superficie S , la cual debe ser igual a (menos) la variación temporal de la carga contenida en V .

1.8. Resumen

Las **ecuaciones de Maxwell para el espacio vacío**, tanto en su forma integral como diferencial, están resumidas a continuación:

- Formas integrales

$$\begin{aligned}
\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} &= q && \text{(Ley de Gauss para el campo eléctrico)} \\
\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= 0 && \text{(Ley de Gauss para el campo magnético)} \\
\oint_l \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int_S (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} && \text{(Ley de Ampère)} \\
\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} && \text{(Ley de Faraday)}
\end{aligned} \tag{43}$$

- Formas diferenciales

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) &= \rho_v && \text{(Ley de Gauss para el campo eléctrico)} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(Ley de Gauss para el campo magnético)} \\
\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} &= \mathbf{J} + \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} && \text{(Ley de Ampère)} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Ley de Faraday)}
\end{aligned} \tag{44}$$

1.9. Formas compleja y armónicas en el tiempo

Las soluciones sinusoidales de estado estable o **armónicas en el tiempo** de las ecuaciones de Maxwell, son de gran importancia para la teoría electromagnética. Estas se obtienen cuando las fuentes, constituidas por densidades de carga y corriente eléctricas, varían en forma sinusoidal en el tiempo.

Si se ha llegado a un estado estacionario, entonces es posible encontrar soluciones de las ecuaciones de Maxwell por medio del método de separación de variables: los campos serán igual al producto entre una función de las variables espaciales y otra función que únicamente depende del tiempo. Conviene incluso formular el problema en forma compleja, en donde la parte temporal puede representarse por el factor $e^{j\omega t}$, siendo ω la frecuencia angular con la cual oscilan las fuentes. En esta descripción los campos eléctricos y magnéticos, así como las densidades de carga y corriente, deben reemplazarse como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(u_1, u_2, u_3, t) &\longrightarrow \hat{\mathbf{E}}(u_1, u_2, u_3) e^{j\omega t} \\
\mathbf{B}(u_1, u_2, u_3, t) &\longrightarrow \hat{\mathbf{B}}(u_1, u_2, u_3) e^{j\omega t} \\
\mathbf{J}(u_1, u_2, u_3, t) &\longrightarrow \hat{\mathbf{J}}(u_1, u_2, u_3) e^{j\omega t} \\
\rho_v(u_1, u_2, u_3, t) &\longrightarrow \hat{\rho}_v(u_1, u_2, u_3) e^{j\omega t}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Si insertamos estas soluciones en las ecuaciones diferenciales de Maxwell para el vacío (44) obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\epsilon_0 \hat{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) &= \hat{\rho}_v e^{j\omega t} \\
\nabla \cdot (\hat{\mathbf{B}} e^{j\omega t}) &= 0 \\
\nabla \times \left(\frac{\hat{\mathbf{B}} e^{j\omega t}}{\mu_0} \right) &= \hat{\mathbf{J}} e^{j\omega t} + \frac{\partial(\epsilon_0 \hat{\mathbf{E}} e^{j\omega t})}{\partial t} \\
\nabla \times (\hat{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) &= -\frac{\partial(\hat{\mathbf{B}} e^{j\omega t})}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Note que los operadores nabla sólo actúan sobre las funciones complejas $\hat{\mathbf{E}}(u_1, u_2, u_3)$ y $\hat{\mathbf{B}}(u_1, u_2, u_3)$ que dependen de las variables espaciales, mientras que $\partial/\partial t$ sólo afecta al factor $e^{j\omega t}$. Por lo tanto, después de derivar en el tiempo y cancelar los factores $e^{j\omega t}$, las ecuaciones (46) quedan

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\epsilon_0 \hat{\mathbf{E}}) &= \hat{\rho}_v \\
\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} &= 0 \\
\nabla \times \frac{\hat{\mathbf{B}}}{\mu_0} &= \hat{\mathbf{J}} + j\omega\epsilon_0 \hat{\mathbf{E}} \\
\nabla \times \hat{\mathbf{E}} &= -j\omega \hat{\mathbf{B}}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Estas son las **formas complejas armónicas en el tiempo de las ecuaciones de Maxwell** para el espacio vacío. Luego de encontrar las soluciones $\hat{\mathbf{E}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ que satisfacen (47), los campos eléctricos y magnéticos se obtienen tomando la parte real del producto entre estas cantidades y el factor $e^{j\omega t}$:

$$\mathbf{E}(u_1, u_2, u_3, t) = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}(u_1, u_2, u_3) e^{j\omega t} \right] \tag{48}$$

$$\mathbf{B}(u_1, u_2, u_3, t) = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{B}}(u_1, u_2, u_3) e^{j\omega t} \right]. \tag{49}$$

Un proceso similar también permite escribir las formas complejas armónicas en el tiempo de las ecuaciones integrales de Maxwell.

2. Ecuaciones de Maxwell para medios materiales

Debido a que los materiales están compuestos por átomos, los cuales a su vez están constituidos por partículas cargadas positivamente (protones) y negativamente (electrones), las distribuciones espaciales o el estado de movimiento de estas partículas se ven afectados por los campos eléctricos y magnéticos aplicados. Es necesario entonces realizar modificaciones en las ecuaciones de Maxwell, para obtener expresiones generales que sirvan tanto para predecir los campos electromagnéticos en el vacío como en el interior de un medio material. La clave para lograr esto consiste en postular modelos que describan la conductividad y la polarización eléctricas, así como la polarización magnética de los materiales.

2.1. Conductividad eléctrica en metales

La descripción más simple del fenómeno de conducción eléctrica en un medio material puede darse a través del **modelo colisional de Drude**. Cuando los átomos de un dado elemento son agrupados para formar un metal, los electrones de valencia son capaces de deslocalizarse

quedando libres para moverse dentro de la estructura cristalina. A este sistema se lo denomina **gas de electrones libres**. Estos electrones no pueden abandonar el material ya que las paredes del mismo se comportan como las paredes de un recipiente que contiene a un gas atómico o molecular. En equilibrio y en ausencia de fuerzas externas, la velocidad promedio de las partículas será cero (aunque la velocidad promedio de los electrones es cero, $\bar{\mathbf{v}} = 0$, el promedio de su módulo no lo es, $|\bar{\mathbf{v}}| \neq 0$). Para explicar la conducción eléctrica en metales, Drude modificó esta visión ideal al suponer que los electrones son capaces de colisionar con los iones positivos de la red (los átomos que han quedado ionizados luego de perder el electrón de valencia). Dos conjeturas son realizadas en este modelo colisional. En primer lugar, se supone que en promedio un electrón interaccionará con un ion cada un cierto tiempo τ_c . Por otro lado, que estas colisiones son capaces de alterar el estado de movimiento de las partículas en forma aleatoria, de tal manera que las velocidades de los electrones antes y después de un evento de choque están totalmente descorrelacionadas.

Cuando un campo eléctrico estático es aplicado, los electrones de masa m experimentan una fuerza de Lorentz igual a $\mathbf{F}_E = -e\mathbf{E}$. De acuerdo a la segunda ley de Newton tenemos que

$$\frac{m\mathbf{v}_d}{\tau_c} = -e \mathbf{E}, \quad (50)$$

donde $\mathbf{v}_d$ es la velocidad de deriva promedio que alcanzan los electrones durante el tiempo τ_c (note que se ha tomado en cuenta que en promedio la velocidad inicial será cero). Despejando la velocidad obtenemos

$$\mathbf{v}_d = -\frac{e\tau_c}{m} \mathbf{E} = -\mu_e \mathbf{E}, \quad (51)$$

donde $\mu_e = \frac{e\tau_c}{m}$ es el coeficiente de movilidad de los electrones. La densidad de corriente eléctrica, se puede determinar suponiendo que en el metal hay una densidad n de electrones de conducción por unidad de volumen

$$\mathbf{J} = -ne\mathbf{v}_d = \frac{ne^2\tau_c}{m} \mathbf{E}. \quad (52)$$

Esta relación lineal entre el campo $\mathbf{E}$ y la densidad de corriente $\mathbf{J}$ se cumple para una gran variedad de materiales conductores. En la forma

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}}, \quad (53)$$

es conocida como la **ley de Ohm**, siendo

$$\sigma = \frac{ne^2\tau_c}{m} \quad (54)$$

la una constante denominada **conductividad del material**. Para un material anisótropo o para campos eléctricos muy intensos, la relación lineal entre $\mathbf{J}$ y $\mathbf{E}$ dejará de cumplirse. En estos casos la conductividad eléctrica se representa mediante un tensor el cual en general puede ser una función del campo $\mathbf{E}$.

2.2. Polarización eléctrica

Cuando un campo eléctrico es aplicado a un **dieléctrico** (un material aislante cuya conductividad es casi nula), se inducen cambios en las distribuciones de carga atómicas o moleculares que provocan variaciones significativas del campo eléctrico en interior del material. A este fenómeno se lo denomina **polarización eléctrica**.

Existen varios tipos de polarización eléctrica entre los que podemos nombrar:

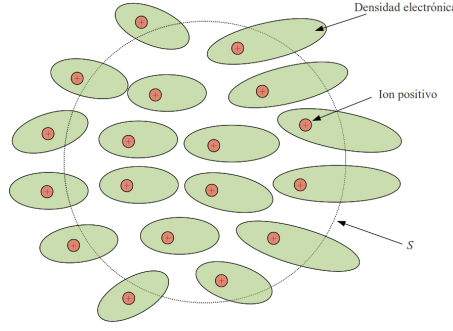


Figura 3: Esquema que muestra cómo se origina una carga de polarización.

- **Polarización electrónica.** Esta clase de polarización se produce como consecuencia de la distorsión de las densidades de carga de los electrones del material que se encuentran ligados a los núcleos atómicos. Su efecto es significativo dentro del rango de frecuencias del espectro visible, entre 0,4 y 0,8 $[\mu\text{m}]$.
- **Polarización iónica.** En este caso el campo eléctrico externo causa que los iones positivos de las moléculas del material se reubiquen y se orienten con el campo. Este tipo de polarización es típica a la frecuencia del infrarrojo.
- **Polarización polar o de orientación.** Esta clase de polarización ocurre en materiales cuyas moléculas forman un dipolo permanente. Cuando se aplica un campo eléctrico externo, los dipolos que se encontraban orientados al azar se alinean con el campo. Este efecto es contrarrestado en parte por la agitación térmica (que aumenta con la temperatura) y la interacción mutua entre las partículas. Un ejemplo de este tipo de polarización es el agua.
- **Polarización de carga espacial.** Esta polarización se produce como consecuencia de la acumulación de carga eléctrica en las discontinuidades del material. Es común a las frecuencias de radio en materiales con conductividad eléctrica apreciable.

El concepto de **dipolo eléctrico** es esencial para entender la polarización eléctrica de un material. Un dipolo elemental está constituido por dos cargas puntuales de igual magnitud pero distinto signo, q y $-q$, separadas una distancia d_i . Se define su impulso o **momento dipolar eléctrico** como

$$\mathbf{p}_i = q\mathbf{d}_i, \quad (55)$$

donde $\mathbf{d}_i$ es un vector de módulo d_i que está dirigido desde la carga negativa a la positiva. Como veremos más adelante (en la unidad 3, en la sección “Desarrollo multipolar del potencial eléctrico”), cualquier distribución asimétrica de cargas también tiene asociado un momento dipolar efectivo. De esta manera, cada una de las moléculas de un material polarizado contribuirán con un momento $\mathbf{p}_i$. El momento dipolar promedio por unidad de volumen, denominado **campo de polarización eléctrica**, se define como

$$\mathbf{P} \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i}{\Delta v}, \quad (56)$$

donde N es el número de dipolos contenidos en el elemento de volumen Δv .

Consideremos ahora un volumen arbitrario V dentro de una material polarizado como muestra la figura 3. Debido a que cada dipolo tiene una carga neta cero, aquellos que estén situados

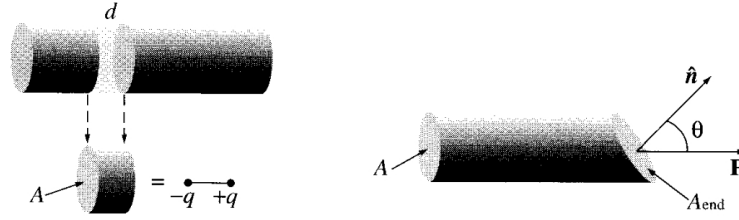


Figura 4: (Izquierda) Volumen tubular situado dentro de un dieléctrico cuya polarización $\mathbf{P}$ es uniforme y paralela al eje del tubo. (Derecha) El mismo tubo pero ahora con un extremo cortado en forma oblicua.

totalmente en el interior de dicho volumen no contribuirán a la formación de un exceso de **carga ligada** (o carga neta dentro de V). Por otro lado, sí habrá una contribución de los dipolos que se encuentran atravesando la superficie S que encierra a V , ya que parte de la carga de estos momentos está situada dentro y parte fuera del volumen considerado. La carga total ligada o de polarización q_p dentro del volumen será

$$-\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = q_p. \quad (57)$$

Es posible realizar una demostración heurística de la expresión anterior (ver referencia [6], página 170). Consideremos la figura 4 (izquierda), la cual representa un volumen tubular que está dentro de un dieléctrico cuya polarización $\mathbf{P}$ es uniforme y paralela al eje del tubo. El momento dipolar de este elemento será simplemente $p = PA d$, donde A es el área de la sección transversal y d la longitud del tubo. En términos de la carga q acumulada en los extremos, este mismo momento dipolar se puede escribir como $p = qd$ y por lo tanto tendremos que $q = PA$. De esta forma la densidad de carga superficial será $\rho_{sp} = \frac{q}{A} = P$. Por otro lado, si un extremo tiene un corte oblicuo [ver figura 4 (derecha)], entonces su área A_{end} estará dada por $A = A_{\text{end}} \cos(\theta)$. En este caso tendremos que la densidad de carga superficial será igual a

$$\rho_{sp} = \frac{q}{A_{\text{end}}} = P \cos(\theta) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad (58)$$

donde $\mathbf{n}$ es un versor normal a A_{end} . En un caso general, integrando es posible calcular la carga total de polarización acumulada en una superficie cerrada,

$$q_{sp} = \oint_S \rho_{sp} ds = \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}. \quad (59)$$

Finalmente, considerando que el material es neutro, vemos que la carga de polarización en su interior será $q_p = -q_{sp}$, lo que demuestra que la ecuación (57) es correcta.

El signo menos en (57) puede justificarse si consideramos que un flujo positivo ($\mathbf{P}$ fluyendo hacia afuera de S) contribuye con un exceso de carga negativa, o viceversa, contribuye con una carga positiva si el flujo es negativo ($\mathbf{P}$ fluyendo hacia adentro de S). Usando el teorema de la divergencia y suponiendo que hay una densidad de carga de polarización, ρ_p , podemos reescribir la expresión anterior como una integral de volumen

$$-\int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dv = \int_V \rho_p dv. \quad (60)$$

Como el volumen V es arbitrario (podría ser incluso un diferencial de volumen) deducimos que los integrandos deben ser iguales

$$\boxed{-\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_p}. \quad (61)$$

La ecuación (61) muestra que en los puntos del material polarizado en los cuales hay una divergencia de $\mathbf{P}$ existe una densidad de carga que, aunque está ligada, contribuye al campo eléctrico total.

Finalmente, si el campo eléctrico aplicado varía en el tiempo también lo hará la polarización del material, lo que da origen a un movimiento de cargas ligadas. Derivando la ecuación (56) respecto al t obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial t}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left(\frac{Nq}{\Delta v} \right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{d}_i}{N} = \rho_+ \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = \mathbf{J}_p, \quad (62)$$

donde $\mathbf{d}$ es el desplazamiento dipolar promedio y $\mathbf{J}_p$ la **densidad de corrientes de polarización eléctrica**. Como veremos más adelante, esta densidad

$$\boxed{\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}}, \quad (63)$$

permitirá modificar la ley de Ampère para que sea aplicable a los medios materiales.

2.3. Ley de Gauss para campos eléctricos y magnéticos

Como vimos anteriormente, en presencia de una campo eléctrico un material dieléctrico se polariza originando una densidad de cargas de polarización. Esta densidad mas la densidad de cargas libres da origen al campo eléctrico total dentro del material. De esta forma la expresión diferencial de la ley de Gauss (28) puede escribirse como

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v + \rho_p. \quad (64)$$

Considerando la ecuación (61), podemos reescribir la expresión anterior como

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v. \quad (65)$$

Definiendo ahora el campo de **desplazamiento** como

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}, \quad (66)$$

la ecuación (65) queda

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v}. \quad (67)$$

La expresión diferencial anterior es la generalización de la **ley de Gauss para campos eléctricos en medios materiales**. Usando el teorema de la divergencia, (67) puede escribirse en forma integral como

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_v dv}. \quad (68)$$

Los experimentos revelan que en muchos materiales isótropos hay una relación lineal entre el campo eléctrico y la polarización del dieléctrico

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (69)$$

donde al parámetro adimensional χ_e se lo denomina **susceptibilidad eléctrica**. A partir de la definición de campo de desplazamiento y usando la ecuación anterior podemos deducir que

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (70)$$

A $\epsilon \equiv (1 + \chi_e)\epsilon_0$ se la conoce como **permitividad o constante dieléctrica de la región**. Usando esta cantidad es posible reescribir la ley diferencial de Gauss (67) como

$$\boxed{\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_v}, \quad (71)$$

la cual tiene la misma forma que en el vacío pero donde la permitividad ϵ_0 ha sido sustituida por ϵ . Si el material no es lineal y es anisótropo (la polarización depende de la dirección en la cual se aplica el campo), entonces la susceptibilidad y la permitividad ya no serán constante sino tensores que dependen del campo aplicado. Este tipo de situaciones no serán estudiadas en este curso.

Los resultados obtenidos hasta el momento nos permiten estudiar la relajación de carga en un material conductor homogéneo de conductividad σ y permitividad ϵ . Si la distribución de carga inicial es $\rho_v(u_1, u_2, u_3, 0)$, entonces de acuerdo a la ecuación de continuidad (40) y la ley de Ohm (53) tenemos que

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0. \quad (72)$$

Usando ahora la ley de Gauss (71) la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = 0, \quad (73)$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden cuya solución es

$$\rho_v(u_1, u_2, u_3, t) = \rho_v(u_1, u_2, u_3, 0)e^{-(\sigma/\epsilon)t}. \quad (74)$$

El resultado anterior muestra que, si en un conductor se acumula una densidad volumétrica de carga, esta tenderá a cero exponencialmente con un tiempo de relajación dado por $\tau = \epsilon/\sigma$, el cual es del orden de 10^{-18} [seg] para los buenos conductores. Debido a la conservación de la carga y a las fuerzas de repulsión eléctricas, estas cargas fluirán a la superficie del conductor donde residirán permanentemente (note que las cargas pueden permanecer indefinidamente en la superficie ya que en el régimen estacionario el campo eléctrico es normal a esta).

Finalmente, considerando que no existen cargas magnéticas y que la aplicación de un campo eléctrico o magnético no es capaz de inducirlos, se concluye que la ley de Gauss para los campos magnéticos tanto en su forma integral (29) como diferencial (30), continúa siendo válida para los medios materiales.

2.4. Polarización magnética

Cuando se aplica un campo magnético externo a un medio material, este puede adquirir una propiedad denominada **magnetización**. Los materiales para los cuales esta magnetización se opone al campo aplicado son denominados **diamagnéticos**, mientras que los que producen una magnetización paralela al campo son llamados **paramagnéticos**. En ambos casos al retirar el campo externo la magnetización desaparece. Otras sustancias, denominadas **ferromagnéticas**, retienen un cierto grado de magnetización incluso cuando el campo aplicado ha sido removido. El ejemplo típico de un ferromagneto es el hierro (o aleaciones de hierro) con el cual se pueden fabricar imanes permanentes.

Es posible describir estos fenómenos partiendo del concepto de **momento magnético**. Los momentos magnéticos en un material pueden tener diferentes orígenes: **momentos orbitales** electrónicos y **momentos intrínsecos de espín** tanto de los electrones como de los núcleos atómicos. Por simplicidad, tomaremos una visión clásica la cual consiste en suponer que todos

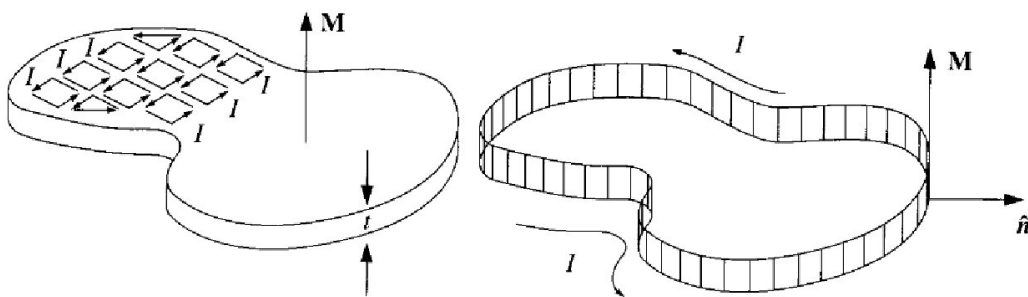


Figura 5: Material magnetizado uniformemente. (a) A la izquierda se observan las corrientes ligadas que originan los momentos magnéticos, y (b) a la derecha la corriente superficial no cancelada.

estos momentos son orbitales y están producidos por **corrientes ligadas** I que circulan alrededor de trayectorias cerradas muy pequeñas, cuya área diferencial es ds . Definimos entonces el momento magnético como

$$\mathbf{m} \equiv I \, ds, \quad (75)$$

donde podemos apreciar que $\mathbf{m}$ está orientado en la misma dirección que el vector $d\mathbf{s}$ el cual es perpendicular al área ds (la orientación de este último se elige usando la regla de la mano derecha, tomando en cuenta el sentido de circulación de la corriente). Como se ha visto en cursos anteriores de física básica, en presencia de un campo magnético aplicado estos momentos experimentan un torque dado por

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (76)$$

Esto hace que los momentos magnéticos se orienten con el campo. En un material real se origina una competencia entre estas fuerzas que intentan alinear a los momentos con el campo, y la tendencia al desorden producida por la agitación térmica.

Al igual que para la polarización eléctrica, definimos la **densidad de magnetización** como

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i}{\Delta v}, \quad (77)$$

donde N es el número de dipolos magnéticos contenidos en el elemento de volumen Δv . Como veremos pronto, las corrientes ligadas que originan estos momentos deben considerarse en la ley de Ampère junto con las corrientes de cargas libres, pues ambas contribuyen a generar un campo magnético.

Antes de modificar la ley de Ampère, lo primero que debemos hacer es expresar las densidades de corriente (ligadas) en términos del campo $\mathbf{M}$. La figura 5 (a) muestra la distribución de corrientes ligadas para una lámina delgada de una material que ha sido magnetizado uniformemente. Podemos observar que las corrientes interiores que pertenecen a trayectorias adyacentes se cancelan. Como es mostrado en la figura 5 (b), sólo una corriente superficial I sobrevive. Para determinar la densidad de corrientes superficial asociada, $\mathbf{J}_{sm}$, razonamos como sigue. Consideremos que el espesor del material es t y su superficie mayor es S . Debido a que la magnetización es uniforme podemos escribir que $m = MSt$. Este mismo momento dipolar magnético es igual a $m = IS$, expresión a la que podemos llegar si consideramos que las corrientes interiores se cancelan y que sólo la corriente superficial permanece. Igualando ambas expresiones llegamos al resultado $J_{sm} = I/t = M$. Esta ecuación puede generalizarse como

$$\boxed{\mathbf{J}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}}, \quad (78)$$

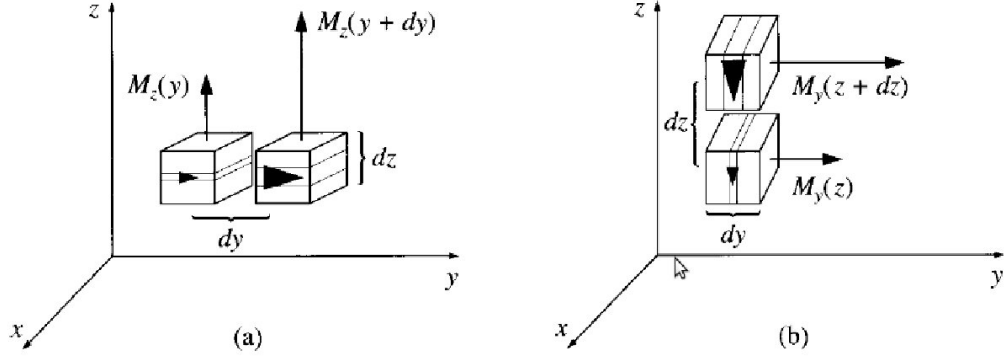


Figura 6: Material con magnetización no uniforme. La figura muestra las corrientes ligadas y las magnetizaciones de dos elementos de volumen adyacentes que están desplazados uno respecto del otro en (a) la dirección y y (b) la dirección z .

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la superficie por la que circula la corriente $\mathbf{J}_{sm}$ (ver figura 5). Se puede demostrar que la ecuación (78) es válida incluso para campos de magnetización no uniformes [6].

Cuando la magnetización no es uniforme las corrientes interiores no se cancelan. Esto da origen a densidades de corrientes ligadas, $\mathbf{J}_m$. Para encontrar una expresión que vincule estas corrientes con el campo $\mathbf{M}$ procedemos como sigue [6]. La figura 6 (a) muestra las corrientes y las magnetizaciones de dos elementos de volumen adyacentes. Notemos que se ha supuesto que la componente z de $\mathbf{M}$ aumenta al desplazarse en la dirección positiva del eje y . Para cada elemento de volumen tenemos que

$$I \Delta x \Delta y = m_z(x, y, z) = M_z(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (79)$$

por lo que la corriente ligada es

$$I = M_z(x, y, z) \Delta z. \quad (80)$$

La corriente que fluye en la dirección x en la superficie que comparten los dos elementos de volumen es

$$I'_x = [M_z(x, y + \Delta y, z) - M_z(x, y, z)] \Delta z = \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z. \quad (81)$$

Esta no es la única corriente en la dirección x . Observando la figura 6 (b), podemos ver que para esos dos elementos de volumen adyacentes también hay una contribución a la corriente dada por

$$I''_x = [M_y(x, y, z) - M_y(x, y, z + \Delta z)] \Delta y = -\frac{\partial M_y}{\partial z} \Delta z \Delta y. \quad (82)$$

La densidad neta de corriente en la dirección x será entonces

$$J_{mx} = \frac{I'_x + I''_x}{\Delta z \Delta y} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}. \quad (83)$$

Si se analizan las restantes componentes es posible concluir que

$$\boxed{\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}}. \quad (84)$$

2.5. Leyes de Ampère y Faraday

Sumadas a las corrientes de convección (o conducción) y desplazamiento, en presencia de medios materiales también debemos tener en cuenta las corrientes originadas por la polarización y la magnetización del sistema. Como analizamos anteriormente, estas están dadas por las ecuaciones (63) y (84) respectivamente. Considerando entonces la densidad de corriente neta que puede existir en un dado punto del espacio, la expresión diferencial de la ley de Ampère (36) puede modificarse como

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}. \quad (85)$$

Agrupando los términos obtenemos

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} + \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t}. \quad (86)$$

Definiendo el campo de **intensidad magnética** como

$$\boxed{\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}}, \quad (87)$$

y recordando la expresión para el vector de desplazamiento eléctrico (66), podemos reescribir (86) como

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}. \quad (88)$$

Esta es la expresión diferencial de la **ley de Ampère para medios materiales**. La expresión integral correspondiente se obtiene aplicando el teorema de Stokes

$$\boxed{\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}. \quad (89)$$

Para materiales isótropos y lineales se encuentra que

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (90)$$

donde a χ_m se la denomina **susceptibilidad magnética** del material. Usando la relación anterior y la definición de $\mathbf{H}$, es posible escribir una ecuación que vincula a este campo con $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}. \quad (91)$$

A la cantidad $\mu = (1 + \chi_m) \mu_0$ se la conoce como **permeabilidad del material**. En el caso más general de que un material no sea lineal, la permeabilidad será un tensor y dependerá del campo $\mathbf{H}$.

Finalmente, notemos que las expresiones integral (37) y diferencial (38) de la ley de Faraday para el espacio vacío, son las mismas que para los medios materiales. Esto se debe a que estas expresiones no se ven afectadas por las cargas y las corrientes de polarización ni por las corrientes de magnetización.

2.6. Condiciones de frontera

En muchos problemas es necesario determinar cómo se comportan los campos electromagnéticos en las superficies o **interacciones** que separan dos medios materiales diferentes, cada uno de ellos caracterizado por una permitividad ϵ , una permeabilidad μ y una conductividad σ . Si se conocen soluciones particulares del campo en los dos materiales, aplicando estas **condiciones de frontera** es posible obtener una solución completa para todo el sistema. Para encontrar estas relaciones usaremos las expresiones integrales de las ecuaciones de Maxwell para medios materiales.

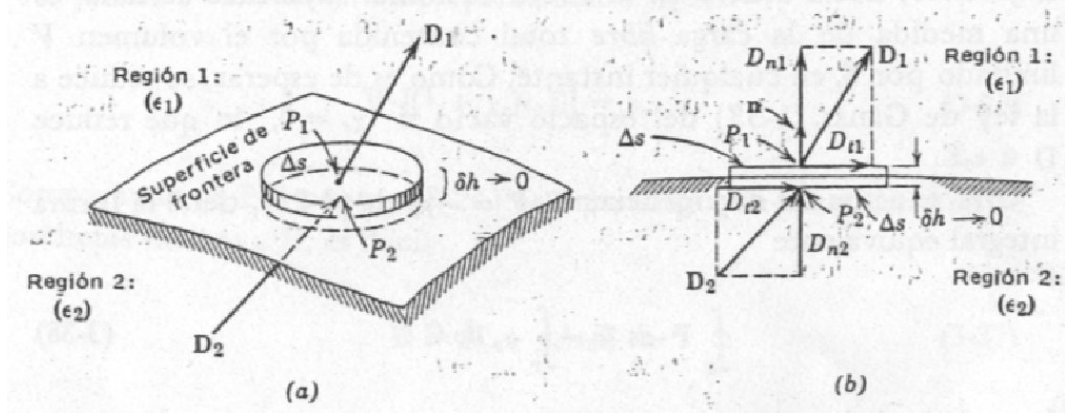


Figura 7: (a) Superficie Gaussiana en forma de moneda usada para determinar la condición de frontera de la componente normal de $\mathbf{D}$. (b) Vista de perfil.

Comenzamos estudiando cómo cambian las **componentes normales de los campos electromagnéticos** en una interacción. Para ello usaremos una superficie Gaussiana en forma de moneda como la mostrada en la figura 7, donde cada cara tiene un área Δs y el espesor es δh . De acuerdo a la ley de Gauss (68)

$$D_{n1}\Delta s - D_{n2}\Delta s + \Phi_{\text{lat}} = \rho_v \Delta s \delta h, \quad (92)$$

donde Φ_{lat} es igual al flujo lateral. Si definimos la densidad superficial de carga libre como

$$\rho_s \equiv \lim_{\delta h \rightarrow 0} \rho_v \delta h, \quad (93)$$

entonces dividiendo la expresión (92) por el área Δs y tomando el límite $\delta h \rightarrow 0$ obtenemos

$$\boxed{D_{n1} - D_{n2} = \rho_s}. \quad (94)$$

Notemos que al tomar el límite la contribución del flujo lateral se anula. La ecuación anterior es la **condición de frontera para la componente normal del campo de desplazamiento**. La relación (94) también puede escribirse como

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s}, \quad (95)$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la interacción y que está dirigido de la región 2 a la 1.

Hay dos casos particulares que son de gran interés. Si ambas regiones son dieléctricos perfectos (las conductividades σ_1 y σ_2 son cero), entonces no pueden haber cargas libres en la

interacción de manera que $\rho_s = 0$. Esto implica que la componente normal del campo de desplazamiento será continua: $D_{n1} = D_{n2}$ o

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2. \quad (96)$$

En términos del campo eléctrico esta misma expresión se puede escribir como $\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$. Por otro lado, si la región 1 es un dieléctrico perfecto y la 2 es un conductor perfecto ($\sigma_2 \rightarrow \infty$), entonces el campo eléctrico en el conductor será cero, pues de otra manera las corrientes de conducción tenderían a infinito (considere la ley de Ohm). De esta forma la condición de frontera (95) queda

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_s. \quad (97)$$

Aunque la región 2 tenga una conductividad finita, la expresión anterior sigue siendo válida para un problema de campo estático, siempre y cuando no estén presentes corriente estacionarias. Esto es así pues de acuerdo a la ley de Ohm, el hecho de que no exista una corriente implica que el campo eléctrico (y por tanto el campo de desplazamiento) será nulo dentro del conductor.

Usando una superficie Gaussiana igual a la mostrada en la figura 7, podemos determinar la **condición de frontera para la componente normal del campo magnético $\mathbf{B}$** . De acuerdo a la ley de Gauss (29) obtenemos

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2}, \quad (98)$$

la cual nos dice que la componente normal del campo magnético es continua en el límite que separa a las dos regiones (sin embargo, en general la componente normal de $\mathbf{H}$ no es continua en la interacción).

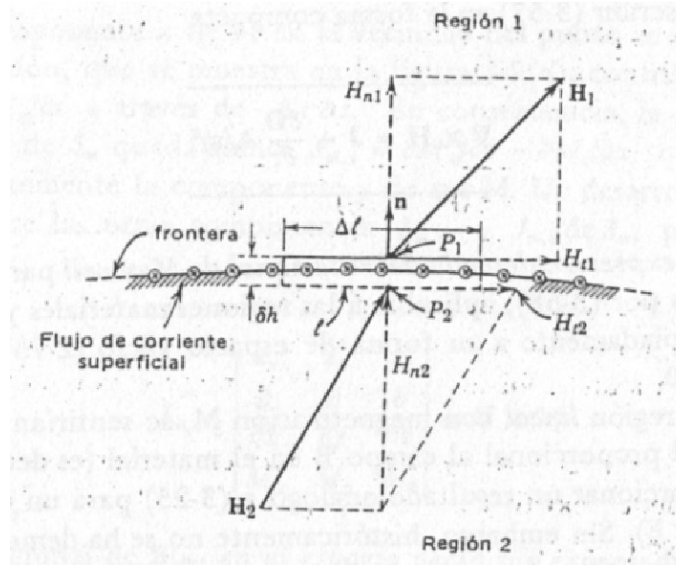


Figura 8: Trayectoria de circulación construida para relacionar las componentes tangenciales de $\mathbf{H}$ en ambos lados de la interacción.

Para determinar cómo se relacionan las **componentes tangenciales de los campos electromagnéticos** en una interacción, usaremos las expresiones integrales de las leyes de Ampère y Faraday para medios materiales. La figura 8 muestra una interacción de perfil, en la cual se ha elegido una trayectoria de circulación rectangular de dimensiones Δl y δh . Usando la ley de Ampère (89) obtenemos

$$H_{t1}\Delta l - H_{t2}\Delta l = J_{n'}\Delta l \delta h + \frac{\partial D_{n'}}{\partial t}\Delta l \delta h, \quad (99)$$

donde $J_{n'}$ y $D_{n'}$ son las componentes de la densidad de corriente y el campo de desplazamiento, que son normales a la superficie limitada por la trayectoria de circulación elegida. Para escribir la expresión anterior se ha despreciado la contribución a la circulación de los laterales de longitud δh (en el límite con $\delta h \rightarrow 0$ esta contribución será nula). Si definimos la densidad superficial de corriente como

$$\mathbf{J}_s \equiv \lim_{\delta h \rightarrow 0} \mathbf{J} \delta h, \quad (100)$$

entonces dividiendo la expresión (99) por la longitud Δl y tomando el límite $\delta h \rightarrow 0$ obtenemos

$$\boxed{H_{t1} - H_{t2} = J_{sn'}}. \quad (101)$$

La ecuación anterior es la **condición de frontera para la componente tangencial del campo $\mathbf{H}$** . La expresión (101) también puede escribirse como

$$\boxed{\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s}, \quad (102)$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la interacción y que está dirigido de la región 2 a la 1.

Como antes consideremos dos casos en los cuales se aplica (102). En primer lugar, supongamos que ambas regiones tienen conductividad finita. En este caso sólo tenemos una corriente eléctrica distribuida en todo el volumen, y no una densidad superficial finita localizada en la frontera entre ambos materiales. De este modo

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2. \quad (103)$$

Por lo tanto la componente tangencial del campo $\mathbf{H}$ es continua. Por otro lado, si la región 2 es un conductor perfecto entonces, como vimos anteriormente, el campo eléctrico en el interior será nulo. De acuerdo a la expresión armónica compleja de la ley de Faraday (47), esto implica que para frecuencias mayores que cero los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ también serán nulos (demuestre esta afirmación). De esta forma la condición de frontera (102) quedará

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s. \quad (104)$$

Razonando en forma similar y usando la figura 8 como referencia, la ley integral de Faraday (37) nos permite determinar la **condición de frontera para la componente tangencial del campo $\mathbf{E}$**

$$\boxed{\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2}. \quad (105)$$

La ecuación anterior expresa que la componente tangencial del campo eléctrico siempre es continua en una interacción.

2.7. Resumen

En resumen, las **ecuaciones de Maxwell para los medios materiales** tanto en su forma integral como diferencial son:

- Formas integrales

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} &= q && \text{(Ley de Gauss para el campo de desplazamiento)} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= 0 && \text{(Ley de Gauss para el campo magnético)} \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} && \text{(Ley de Ampère)} \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} && \text{(Ley de Faraday)} \end{aligned} \quad (106)$$

- **Formas diferenciales**

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v && \text{(Ley de Gauss para el campo de desplazamiento)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(Ley de Gauss para el campo magnético)} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && \text{(Ley de Ampère)} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Ley de Faraday)}\end{aligned}\tag{107}$$

Y las condiciones de frontera son:

- **Componentes normales**

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \rho_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0\end{aligned}$$

- **Componentes tangenciales**

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0\end{aligned}$$

3. Sistema de unidades

El sistema de unidades que usaremos en este curso es el **mks en su forma racionalizada** [1]. En la tabla (1) se listan algunas de las magnitudes físicas más importantes que ya hemos definido o que introduciremos en las siguientes unidades. Para cada una de ellas se especifica el nombre, símbolo, unidad y abreviatura. En la mayoría de los casos también se indica a qué equivale cada unidad en función de las unidades básicas. Una lista más detallada puede consultarse en las referencias [1] y [4].

Referencias

- [1] Carl T. A. Johnk, **Teoría electromagnética. Campos y ondas**. Limusa (1999).
- [2] Leonard Eyges, **The classical electromagnetic field**. Dover (1972).
- [3] John R. Reitz, Frederick J. Milford y Robert W. Christy, **Fundamentos de la teoría electromagnética**. Addison-Wesley (1984).
- [4] John D. Jackson, **Classical Electrodynamics**. John Wiley and Sons (1999).
- [5] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, **Solid State Physics**. Cornell University (1976).
- [6] David J. Griffiths, **Introduction to Electrodynamics**. Prentice Hall (1999).

Cuadro 1: Magnitudes físicas en el sistema mks.

Cantidad física	Símbolo	Unidad	Abreviatura	Unidades básicas
Longitud	l, d , etc..	metro	m	
Masa	m, M , etc..	kilogramo	kg	
Tiempo	t, T , etc..	segundo	seg	
Carga	q, Q , etc..	coulomb	C	
Corriente	i, I , etc..	ampere	A	C/seg
Fuerza	F	newton	N	kg.m/seg
Frecuencia	f	hertz	Hz	seg ⁻¹
Energía	U	joule	J	N.m
Potencia	P	watt	W	J/seg
Potencial eléctrico	Φ, V	volt	V	N.m/C
Capacitancia	C	farad	F	C/V=A.seg/V
Resistencia	R	ohm	Ω	V/A
Conductancia	G	mho	$\mathcal{U}$	A/V
Conductividad	σ	mho/metro	$\mathcal{U}/m$	
Inductancia	L	henry	H	V.seg/A
Intensidad eléctrica	E			N/C
Polarización eléctrica	P			C/m ²
Desplazamiento	D			C/m ²
Den. flujo magnético	B	tesla	T	V.seg/m ²
Flujo magnético	ψ_m	weber	Wb	V.seg
Den. de magnetización	M			A/m
Intensidad magnética	H			A/m

Problemas

- Calcular, para los siguientes casos, la carga neta contenida dentro de un volumen V inmerso en el espacio vacío.
 - $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x 1500 x$, donde V es un cubo centrado en el origen y cuyas aristas miden 20cm.
 - $\mathbf{E} = \mathbf{a}_\rho \frac{1000}{\rho}$, donde V es un cilindro recto de 10cm de radio, 100cm de longitud y que está centrado en el eje z .
 - $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r 500 r$, donde V es una esfera de radio $r = 5\text{cm}$ centrada en el origen.
- Calcular el campo eléctrico generado por una lamina de dimensión infinita que tiene una densidad superficial de carga constante ρ_s .
- Calcular el flujo total del campo $\mathbf{E}$, que atraviesa la cara sombreada del cubo de la siguiente figura.

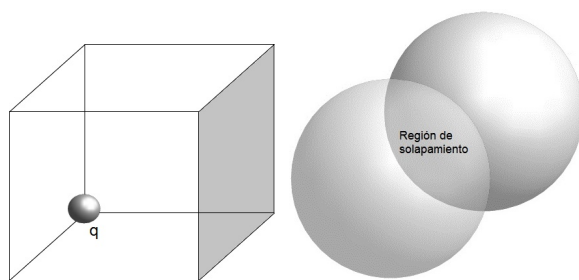


Figura 9: Ver problemas 3 (izquierda) y 6 (derecha).

- Calcular para todo el espacio, el campo eléctrico producido por un cascaron esférico de radio $a \leq r \leq b$, cuya superficie se encuentra uniformemente cargada con una densidad ρ_s . Graficar el modulo de $\mathbf{E}$ como función de r .
- Suponga que un campo eléctrico es de la forma $\mathbf{E} = k r^3 \mathbf{a}_r$, donde k es una constante. Determinar:
 - La densidad de carga volumétrica ρ_v en todo el espacio.
 - La carga total contenida en una esfera de radio R centrada en el origen.
- Dos esferas de radio R que poseen densidades uniformes de carga $+\rho$ y $-\rho$, se colocan de forma tal que se solapan parcialmente (ver figura 9). Muestre que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ en la región de solapamiento es uniforme.
- Suponga que la densidad volumétrica de carga de un cilindro de longitud infinita y radio a esta descrita por la función $\rho_v = \rho_0 (1 + \alpha \rho^2)$, donde α es una constante desconocida. Determinar el valor α para el cual se pueda asegurar que el campo eléctrico en toda la región fuera del cilindro es cero.
- Determinar cuáles de los campos vectoriales siguientes pueden representar a un campo magnético $\mathbf{B}$. Fundamente su respuesta.

$$\text{a) } \mathbf{B} = \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- b) $\mathbf{B} = \sqrt{y-z} \mathbf{a}_x + (zx) \mathbf{a}_y + e^{xy^2} \mathbf{a}_z$
- c) $\mathbf{B} = \tan(x) \mathbf{a}_x$
- d) $\mathbf{B} = \sin(y) \mathbf{a}_x + \sin(z) \mathbf{a}_y + \sin(x) \mathbf{a}_z$
- e) $\mathbf{B} = \frac{1}{r^2} \mathbf{a}_r$
- f) $\mathbf{B} = \frac{1}{r} \mathbf{a}_r$
- g) $\mathbf{B} = r \mathbf{a}_r$
- h) $\mathbf{B} = K \mathbf{a}_r$
9. Encontrar el campo magnético $\mathbf{B}$ producido por una corriente superficial uniforme $\mathbf{J}_s = k\mathbf{a}_x$, la cual fluye en el espacio vacío sobre el plano (x, y) (aquí k es una constante).
10. Una corriente estacionaria I circula en la dirección del eje de un conductor cilíndrico de longitud infinita y radio a . Determinar el campo magnético $\mathbf{B}$ dentro y fuera del conductor para los siguientes casos:
- Cuando la corriente está uniformemente distribuida sobre la superficie del conductor.
 - Si la corriente está distribuida en el interior del conductor de tal forma que la densidad $\mathbf{J}$ es proporcional a la distancia radial ρ .
11. Calcular la corriente inducida sobre una espira de radio a y resistencia eléctrica R , cuando la misma se introduce en una región donde $\mathbf{B} = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{a}_z$. Considere que el eje de la espira está en la dirección del eje z .
12. Calcular la rapidez con que varía la carga encerrada dentro de un volumen arbitrario V , debido a un campo de densidad de corriente $\mathbf{J} = \cos(x) \mathbf{a}_x - 5y^2z \mathbf{a}_z \left[\frac{A}{m^2} \right]$.
13. Calcular el campo de desplazamiento en el vacío para una línea cargada con una densidad $\rho_l = 12 \left[\frac{nC}{m} \right]$. Determinar la magnitud del campo eléctrico a una distancia de 5m.
14. Dos placas paralelas conductoras de extensión muy grande y separadas una distancia d , están cargadas eléctricamente con cargas $\pm Q$ como se indica en la figura siguiente. Entre ellas hay aire excepto en una región donde se ha colocado una pieza dieléctrica de espesor c y permitividad ϵ , la cual está situada a una distancia b de la placa inferior. Determinar:
- El campo de desplazamiento $\mathbf{D}$ en las tres regiones y mostrar su gráfica de flujo.
 - Los campos eléctrico y de polarización, así como sus gráficas de flujo.
 - La densidad superficial de carga ρ_s en las superficies conductoras.
 - La densidad superficial de carga de polarización ρ_{sp} en las dos superficies dieléctricas.

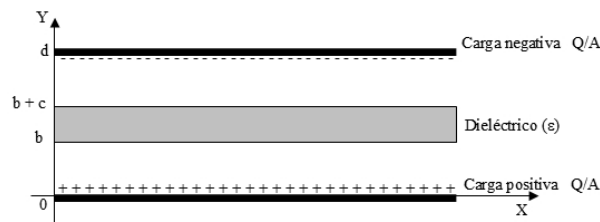


Figura 10: Problema 14.

15. Inmersos en el vacío hay dos planos conductores paralelos de dimensión infinita. Uno de ellos, ubicado a $z = 0$, posee una densidad de carga superficial positiva ρ_s^+ que es constante, mientras que el otro está situado a $z = d$ y también tiene una densidad de carga superficial constante pero de signo negativo, ρ_s^- . Tomando en cuenta que $\rho_s^+ = 2|\rho_s^-|$, determinar una expresión (vectorial) para el campo de desplazamiento $\mathbf{D}$ en todo el espacio.
16. En un medio magnético lineal, isotrópico y homogéneo de permeabilidad μ , tenemos un flujo de densidad de corriente libre $\mathbf{J}_c = \frac{K}{\rho} \mathbf{a}_z$, en donde ρ es la distancia radial en coordenadas circulares cilíndricas. Bajo condiciones estáticas, encontrar la corriente de magnetización inducida dentro del conductor (suponer que el conductor llena todo el espacio).
17. Cuatro sustancias materiales tienen las siguientes susceptibilidades magnéticas: 0, 0.01, 10 y 10000. ¿Cuál es la permeabilidad μ de cada una de ellas?. Si existe en cada material el campo $\mathbf{H} = \mathbf{a}_x$, ¿qué campos $\mathbf{B}$ y de magnetización $\mathbf{M}$ se encuentran allí?.
18. Dos conductores lineales paralelos están inmersos en un medio de permeabilidad $\mu = 2\mu_0$ como muestra la siguiente figura. Los conductores están separados una distancia l y para uno de ellos, el número 1, sabemos que conduce una corriente estacionaria de magnitud I_1 (hacia arriba). ¿Qué corriente (magnitud, dirección y sentido) estacionaria debería tener el conductor 2 para que en un punto P , el cual está situado a la derecha de dicho conductor y a una distancia l , el campo $\mathbf{H}$ sea cero?.

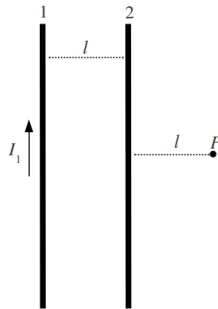


Figura 11: Problema 18.

19. Un alambre de longitud infinita que está situado en el eje z de un sistema de coordenadas cartesianas, conduce una corriente estacionaria de magnitud I la cual circula en el sentido positivo de z . Rodeando a este conductor se encuentra un cascarón cilindro (también de longitud infinita) magnetizable cuyo eje coincide con z . Los radios interior y exterior de este cilindro son, respectivamente, a y b . El resto del espacio está vacío. Considerando que la permeabilidad del material magnético es $\mu = 10\mu_0$, determinar los campos $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio (expresión vectorial).
20. Un conductor cilíndrico infinito de radio a , conduce una corriente estacionaria I . El conductor tiene permitividad $\epsilon = 4\epsilon_0$ y permeabilidad $\mu = 2\mu_0$, y está rodeado de vacío. Suponiendo que la densidad de corriente es constante dentro del material, determinar el valor de los campos $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{M}$ (expresiones vectoriales) para todos los puntos dentro y fuera del conductor.

21. Un medio magnético con permeabilidad μ , está separado del vacío por una superficie situada en el plano $y = 0$ por donde pasa una densidad de corriente $\mathbf{J} = J_x \mathbf{a}_x$. Hallar el campo magnético en la superficie del material si el campo en el vacío justo sobre esta es $\mathbf{H} = H_x \mathbf{a}_x + H_y \mathbf{a}_y + H_z \mathbf{a}_z$ (suponga que el vector unitario $\mathbf{n}$ normal a la interacción, está dirigido de la región magnética hacia el vacío).
22. Un medio magnético con permeabilidad $\mu = 2\mu_0$, está separado del vacío por una interacción plana situada en $x = 0$ por donde circula una densidad superficial de corriente $\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_y 3 - \mathbf{a}_z 2$. La intensidad magnética en el vacío en un dado punto de la interacción es $\mathbf{H} = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y 2 - \mathbf{a}_z 3$. Para este mismo punto calcular $\mathbf{H}$ dentro del material magnético. Suponga que el vector unitario $\mathbf{n}$ normal a la interacción, está dirigido de la región magnética hacia el vacío.
23. Determinar cuál de los esquemas mostrados en la figura 12 corresponden a campos eléctricos, magnéticos o a ninguno de ellos.

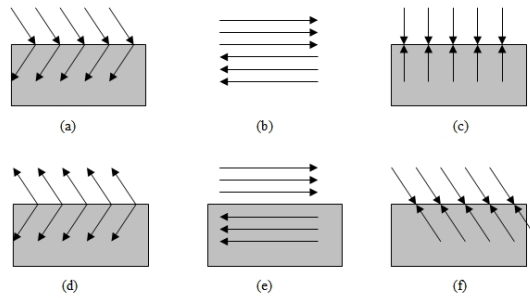


Figura 12: Problema 23.

24. Encontrar una relación para los ángulos del campo eléctrico (Ver figura 13) en una interfase que une dos medios dieléctricos de permitividades ϵ_1 y ϵ_2 . Considere que no hay cargas libres en dicha interfase.

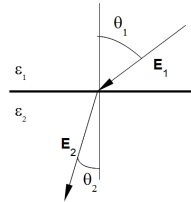


Figura 13: Ver problema 24.

25. Una interacción que separa dos medios dieléctricos con permitividades ϵ_1 y $\epsilon_2 = 3\epsilon_1$, se encuentra situada en el plano $z = 0$. Suponiendo que no hay una densidad de carga superficial acumulada, determinar el campo de desplazamiento en la región 2 si el campo eléctrico en la región 1 es $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x 4 - \mathbf{a}_y 2 + \mathbf{a}_z 6$.
26. Un dieléctrico de permitividad ϵ está rodeado de vacío. En un punto de la interacción entre estos dos medios el campo eléctrico del lado del vacío es $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x 2 + \mathbf{a}_y 3 - \mathbf{a}_z$, mientras que del lado del dieléctrico vale $\mathbf{E}_2 = \mathbf{a}_x 0,5 + \mathbf{a}_y 3 - \mathbf{a}_z$. Suponiendo que la normal a la interacción está en la dirección del eje x y no hay una densidad superficial de carga inducida, calcular la permitividad que tiene el dieléctrico (en unidades de ϵ_0).