Mecánica Estadística

Guía de problemas Nº5

2 de noviembre de 2023

1. Dada la función de Fermi
$$F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}, \tag{1}$$
demostrar que $(dF/d\epsilon)|_{\epsilon=\mu} = -\beta/4$. Ya que a una temperatura diferente de cero $F(\epsilon = \mu) = 1/2$, a partir del resultado anterior demostrar que F cae a $1/4$ cuando $\epsilon \approx \mu + kT$, mientras que sube a $3/4$ cuando $\epsilon \approx \mu - kT$. Esto muestra que los cambios significativos en la distribución de Fermi ocurren en un rango de energías del orden de $2kT$.

2. Un sistema formado por sólo dos partículas se encuentra en equilibrio a la temperatura T. El sistema en su conjunto posee tres niveles de energía: 0, ϵ y 3ϵ, donde ϵ es una constante positiva. Suponiendo que las partículas obedecen la estadística clásica de Maxwell-Boltzmann, calcular:

   a) La función de partición Z y la energía libre de Helmholtz A.
   b) La energía E y los valores a los que tiende esta cantidad en los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$.
   c) La entropía S y los valores a los que tiende esta cantidad en los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$.

3. Resolver el problema 2 suponiendo esta vez que las dos partículas obedecen la estadística Fermi-Dirac.

4. Resolver el problema 2 suponiendo esta vez que las dos partículas obedecen la estadística Bose-Einstein.

5. Dos electrones pueden ocupar dos orbitales cuyas energías son 0 y ϵ (con $\epsilon > 0$). Considerando que estas partículas son fermiones y tienen dos estados de espín ("arriba" y "abajo"), calcular:

   a) La función de partición del sistema.
   b) La energía media E.

c) Los valores límites que toma la energía media cuando $T \to 0$ y $T \to \infty$.

d) La temperatura a la cual la energía media es $\epsilon/2$ (expresar la temperatura en unidades de ϵ/k).

6. Al sistema dado en el problema anterior se le aplica un campo magnético externo B. Como cada electrón posee un momento magnético que puede tomar los valores $\pm\mu_B$, entonces los niveles de energía de cada orbital se desdoblarán. Calcular:

   a) La nueva función de partición del sistema.

   b) La magnetización media M.

   c) Los valores a los que tiende M en el límite $T \to 0$ si: $\epsilon > 2\mu_B B$, $\epsilon = 2\mu_B B$ y $\epsilon < 2\mu_B B$.