

Mecánica Estadística

Guía de problemas N°3

1 de septiembre de 2023

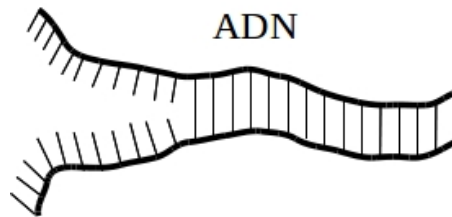
1. Calcular la entropía y la capacidad calorífica a volumen constante del sistema de dos estados usando el formalismo canónico.
2. Un material paramagnético está formado por N átomos idénticos, no interactuantes, donde cada uno de ellos posee un espín $1/2$ de momento magnético m . Al aplicar un campo externo de magnitud H cada átomo tendrá dos niveles cuyas energías serán $-\mu_0 m H$ (cuando el espín está paralelo al campo) y $+\mu_0 m H$ (cuando está antiparalelo al campo). Calcular:
 - a) La función de partición Q del sistema.
 - b) La energía media E como función de H y de la temperatura T .
 - c) La magnetización M como función de H y T .
 - d) La susceptibilidad magnética $\chi = M/H$.
 - e) Demostrar que, para magnitudes bajas del campo externo o para muy altas temperaturas, la susceptibilidad va como $\chi \sim 1/T$ (ley de Curie). Ayuda: realizar una expansión de Taylor de M considerando que $\mu_0 m H \ll kT$.
3. Una aleación binaria está formada por N_A átomos del tipo A y N_B átomos del tipo B que no interactúan entre sí. Todos estos átomos tienen dos niveles de energía: los A tienen niveles 0 y ϵ , mientras que los B tienen niveles 0 y 2ϵ , con $\epsilon > 0$. Calcular la función de partición del sistema, su energía libre de Helmholtz y el calor específico a volumen constante.
4. Una sal paramagnética contiene 1 mol de iones cuyos momentos magnéticos son iguales a un magnetón de Bohr, $\mu_B = 9,274 \times 10^{-24}$ Joule/Tesla.
 - a) Calcular la entropía S del sistema como función de la magnitud del campo aplicado B (recordar que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$) y la temperatura T .
 - b) Suponer ahora que el sistema se mantiene en equilibrio con un foco térmico que está a temperatura $T = 4$ K. Si el campo externo B se incrementa de 1 a 10 Teslas, ¿cuánto calor será transferido al foco térmico?.

5. Un sólido está formado por N átomos idénticos y no interactuantes. Cada uno de ellos posee cuatro niveles con energías $0, \epsilon, 2\epsilon$ y 3ϵ , con $\epsilon/k = 100$ K, y cuyas degeneraciones son, respectivamente, 1, 2, 2 y 1. Calcular, a temperatura ambiente ($T = 300$ K), cuáles son las probabilidades de encontrar a un átomo en cada uno de los niveles de energía permitidos.
6. Un átomo de hidrógeno tiene un nivel fundamental de energía $-13,6$ eV y degeneración 2, y un primer excitado de energía $-3,4$ eV y degeneración 8. Suponiendo que a $T = 300$ K la ocupación de los niveles de energía restantes es despreciable, calcular la probabilidad de encontrar al átomo en el primer excitado.
7. Un sistema está formado por dos átomos, a y b , que interactúan entre sí. El Hamiltoniano del sistema es

$$H = -Jn_a n_b, \quad (1)$$

donde J es una constante positiva y n_a (n_b) es un número cuántico que caracteriza los estados del átomo a (b) y puede tomar los dos valores -1 y $+1$ (los tres valores $-1, 0$ y $+1$). Calcular:

- a) La función de partición Q del sistema.
 - b) La energía media E .
 - c) Los valores promedios de n_a y n_b .
8. Suponga que tiene un sistema formado por tres átomos interactuantes. El Hamiltoniano del sistema es $H = -J\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, donde J es una constante positiva y las variables σ que especifican los estados de cada uno de los átomos pueden tomar los valores ± 1 . Calcular la energía media E y el calor específico C_V del sistema.
 9. Una cadena doble de ADN posee N uniones (ver figura siguiente) cada una de las cuales puede estar cerrada, con energía 0, o bien abierta, con energía δ . Desenrollar esta molécula es equivalente al proceso de abrir una cremallera: una unión puede abrirse si y sólo si las uniones a su izquierda ya están abiertas (ver figura). Para este sistema calcular:
 - a) La función de partición Q (para N finito).
 - b) El valor medio de uniones abiertas en función de la temperatura T .
 - c) Determinar qué valores toma esta última cantidad para los límites $T \rightarrow 0$ y $T \rightarrow \infty$.



10. Un sólido está formado por dos tipos de átomos, a y b , que forman una estructura cristalina con una proporción $2 : 1$, es decir, $N_a = 2N_b$. Estos átomos pueden vibrar en torno a sus posiciones de equilibrio y, en el marco de una aproximación de Einstein, se puede suponer que sus modos normales tienen sólo dos frecuencias de oscilación, $\omega_a = \omega_0$ y $\omega_b = 4\omega_0$. Determinar la energía media y la entropía del sistema como función de la temperatura T . Usar el formalismo canónico.