

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO, MATEMATICAS Y NATURALES

LABORATORIO DE ELECTRÓNICA, INVESTIGACIÓN Y SERVICIOS

LICENCIATURA EN FÍSICA

GUIA DE ESTUDIO PARA ELECTRONICA I

CIRCUITOS DE
CORRIENTE CONTINUA

*** * 2001 * ***

Ing. Héctor Gellón

Ing. Alfredo Debattista

ELECTRÓNICA I – UNSL - LEIS

Estructura del presente Texto	3
CAPITULO I	4
1 Fundamentos y Circuitos de Corriente Continua:	4
1.1 Conceptos Básicos	5
1.1.1 Carga Eléctrica	5
1.1.2 Energía Eléctrica	6
1.1.3 Corriente Eléctrica	6
1.1.3.1 Cargas en movimiento	6
1.1.3.2 Direcciones de referencia	7
1.1.3.3 Relación entre carga y corriente	7
1.1.4 Tensión Eléctrica	8
1.1.4.1 Tensión y Trabajo	8
1.1.4.2 La tensión como potencial	8
1.1.4.3 Direcciones de referencia de las tensiones	9
1.1.4.4 Tensión física	9
1.1.5 Resistencia y Resistores	9
1.1.5.1 Resistencia, Conductancia y Resistividad	9
1.1.5.2 Efecto de la temperatura sobre la resistencia	10
1.1.5.3 Resistores	10
1.1.5.4 Código de colores en Resistores	11
1.2 Ley de Ohm	12
1.2.1 Circuitos Abiertos y Cortocircuitos	13
1.2.2 Interruptores	13
1.3 Fuente de Tensión y Fuente de Corriente	14
1.3.1 Fuentes Ideales de Tensión	14
1.3.2 Celdas y Baterías	14
1.3.3 Celdas en Serie y en Paralelo	15
1.3.4 Fuentes ideales de Corriente	16
1.4 Resistencia Interna en Fuentes de Tensión y Regulación de Tensión	16
1.5 Resistencia Interna en Fuentes de Corriente y Regulación de Corriente	18
1.6 Potencia Eléctrica, Energía y Calor	18
1.7 Circuitos Serie y Paralelo	19
1.7.1 Circuito Serie	19
1.7.1.1 Ley de Tensiones de Kirchhoff	20
1.7.1.2 Regla del Divisor de Tensión	20
1.7.2 Circuito Paralelo	21
1.7.2.1 Ley de Corrientes de Kirchhoff	23
1.7.2.2 Regla del Divisor de Corriente	23
1.7.3 Circuito Serie-Paralelo	24
1.8 Inductores y Capacitores	26
1.8.1 Inductancia e Inductores	26
1.8.1.1 Constante de Tiempo en circuitos RL	28
1.8.2 Capacitancia y Capacitores	29
1.8.2.1 Constante de Tiempo en circuitos RC	32
1.9 Teorema de Superposición	34

1.9.1	Limitaciones del Teorema de Superposición.....	34
1.10	Teorema de Redes Eléctricas.....	34
1.10.1	Teorema de Thevenin.....	34
1.10.2	Teorema de Norton	36
1.10.3	Relación entre los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton	36
1.10.4	Teorema de la Máxima Transferencia de Potencia	37
1.11	Medición de Tensión, Corriente y Resistencia. Errores cometidos.....	37
1.12	EJEMPLOS.....	39



Estructura del presente Texto

El presente texto tiene una estructura definida para que el estudiante siga fácilmente los diferentes tópicos tratados, tal de afianzar los diversos conocimientos de una manera simple y directa.

Para ello se ha estructurado de la siguiente manera:

- Se comienza cada capítulo, con un **índice general**, donde se titulan los tópicos y temas tratados;
- A continuación, se detallan los **Objetivos** buscados para el capítulo en particular;
- Luego, se describe el tema específicamente, incluyendo **definiciones e ideas básicas** sobre el mismo;
- Seguidamente, se incluyen **ejemplos** para afianzar los conceptos a través de la práctica;

Además, se trabaja sobre algunas ideas básicas, que se aplican a lo largo de todo el texto, para hacer comprender al estudiante que los *fundamentos de la ingeniería eléctrica* o los *fundamentos eléctricos* se basan en unos pocos principios básicos, que se repiten una y otra vez. Estas ideas se remarcan adecuadamente en el texto.



CAPITULO I

1 Fundamentos y Circuitos de Corriente Continua:

Indice General

- Conceptos Básicos
 - Carga Eléctrica
 - Energía Eléctrica
 - Corriente Eléctrica
 - Tensión Eléctrica
 - Resistencia y Resistores
- Ley de Ohm
- Fuente de Tensión y Fuente de Corriente
- Resistencia Interna en Fuentes y Regulación de Tensión y Corriente
- Potencia Eléctrica, Energía y Calor
- Circuitos
 - Circuito Serie
 - Ley de Tensiones de Kirchhoff
 - Regla del Divisor de Tensión
 - Circuito Paralelo
 - Ley de Corrientes de Kirchhoff
 - Regla del Divisor de Corriente
 - Circuito Serie-Paralelo
- Inductores y Capacitores
 - Transitorio y constante de tiempo
- Teorema de Superposición
- Teorema de Redes
 - Teorema de Thévenin
 - Teorema de Norton
 - Relación entre los Circuitos Equivalentes de Thévenin y Norton
 - Teorema de Transferencia de la Máxima Potencia

Objetivos

- ✓ Entender las variables físicas usadas para describir los circuitos eléctricos, en particular su relación con la potencia y la energía.
- ✓ Estudiar los distintos componentes y dispositivos que forman los circuitos eléctricos, con sus características asociadas.
- ✓ Entender la Ley de Ohm, fundamental en la teoría de circuitos lineales.
- ✓ Entender como aplicar las leyes de tensiones y corrientes de Kirchhoff al análisis y resolución de los circuitos eléctricos.
- ✓ Ser capaz de analizar los transitorios en circuitos con un componente reactivo, tal el caso de los circuitos RC.



- ✓ Entender el teorema de Superposición, el de Thevenin, el de Norton y el de Transferencia Máxima de Potencia, con su aplicación a los circuitos eléctricos, para una resolución más simple y directa.

1.1 Conceptos Básicos

En esta primera sección se repasarán los conceptos básicos de las variables físicas empleadas para describir los circuitos eléctricos, que luego serán útiles para el análisis y estudio de dichos circuitos.

1.1.1 Carga Eléctrica

La carga eléctrica, al igual que la masa, es una propiedad de la materia. Existen dos tipos de cargas: la *positiva* y la *negativa* que, obviamente, producen efectos opuestos. Así, las ecuaciones que describen los efectos de las cargas comprenden ambos tipos de carga, si se asocia un número positivo con uno de los tipos y un número negativo con el otro tipo. Tradicionalmente, al electrón se le ha asignado signo negativo y al protón positivo. La magnitud de la carga del electrón es la menor carga posible; en el sistema de unidades MKS esto es:

$$e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ coulombs (C)} \quad (1.1)$$

Por ende, 1 coulomb corresponde a la carga transportada aproximadamente por $6,28 \times 10^{18}$ electrones.

El electrón posee una masa extremadamente pequeña, por lo que se habla de la carga como si no estuviera asociada con una masa.

Comenzaremos el estudio de la electricidad con la Ley de Coulomb, que describe la fuerza F que se ejerce entre dos cargas eléctricas Q_1 y Q_2 , separadas entre sí por una distancia r . En el sistema MKS esto es:

$$F = k \left(\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \right) \quad (1.2)$$

Donde $k = 8.987 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 = 1/(4\pi\epsilon_0)$

Nos suena familiar la historia de que cargas iguales se repelen y que cargas distintas se atraen. Ahora bien, imaginemos que una carga experimenta una fuerza debido al campo eléctrico E producido por otra carga eléctrica en un punto. Si F es la fuerza sobre una carga Q , entonces el campo eléctrico E en ese punto será:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad (1.3)$$

Combinando las ecuaciones (1.2) y (1.3) vemos que la magnitud del campo eléctrico producido por una carga aislada, a una distancia r de la misma, es igual a:



$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \quad (1.4)$$

El campo eléctrico total, producido por un grupo de cargas, es la suma vectorial de las contribuciones individuales, dadas por la ecuación (1.4).

Sobre estos conceptos volveremos cuando veamos Corriente y Tensión Eléctrica.

1.1.2 Energía Eléctrica

La energía es el medio de intercambio en un sistema físico, como el dinero en un sistema económico. La energía se intercambia siempre que un objeto físico afecta a otro. En mecánica se toma fuerza y movimiento para realizar trabajo (intercambio de energía). En un circuito eléctrico la fuerza eléctrica se representa mediante una tensión y el movimiento de la carga mediante la corriente. Conociendo la tensión y la corriente presentes en un circuito, podemos monitorear los intercambios de energía.

1.1.3 Corriente Eléctrica

1.1.3.1 Cargas en movimiento

Los conductores eléctricos poseen una cantidad relativamente grande de electrones móviles (de conducción o libres) capaces de moverse en respuesta a las fuerzas eléctricas. Los materiales no conductores, tienen muchas cargas, pero estas no se pueden mover fácilmente, o sea, poseen muy pocos electrones libres. En el punto medio se hallan los semiconductores, que poseen un número intermedio de electrones libres.

Precisamente, el movimiento de las cargas se conoce como *corriente eléctrica*.

Consideremos un alambre con una sección transversal $S \text{ [m}^2\text{]}$ con cargas en movimiento a una velocidad v de izquierda a derecha, como se muestra en la figura 1.1

Si en el tiempo Δt , la cantidad de carga ΔQ (coulombs) cruzan la sección S en la dirección indicada, entonces se define que la *corriente eléctrica* será:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \text{ [C/s] o ampere, [A]} \quad (1.5)$$

La *corriente eléctrica promedio*, en un intervalo de tiempo t entonces será:

$$I = \frac{Q}{t} \text{ [A]} \quad (1.6)$$

Y el *valor instantáneo* de una corriente variable (i), cuando el flujo de cargas no es uniforme, será:

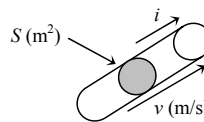


Figura 1.1 Alambre con corriente



$$i = \frac{dq}{dt} \text{ [A]} \quad (1.7)$$

En electrónica, no así en electricidad, el ampere es una unidad habitualmente demasiado grande, por lo que se utilizan submúltiplos como: el miliampere (mA) o el microampere (μA):

$$\begin{aligned} 1 \text{ mA} &= 10^{-3} \text{ A} & 1 \mu\text{A} &= 10^{-6} \text{ A} \\ 1 \text{ A} &= 10^3 \text{ mA} = 10^6 \mu\text{A} \end{aligned}$$

Como consideración general válida para todo el resto del presente texto, se asume que las variables en minúscula, tal el caso de i por ejemplo, representan valores instantáneos y los valores en mayúsculas, tal el caso de I por ejemplo, representan valores promedios o de corriente continua.

1.1.3.2 Direcciones de referencia

Para especificar una corriente se requieren:

- una dirección de referencia y
- un valor numérico, el cual puede ser positivo o negativo.

Las direcciones de referencia de la corriente se indican, generalmente, mediante flechas dibujadas a un lado de las líneas que representan los conductores, o como subíndices, tal cual se indica en la figura 1.2. La relación entre la dirección de referencia y el signo numérico de la corriente se muestra en la mencionada figura, en la cual se expresa la misma corriente de tres maneras diferentes.

Por convención se ha tomado como positiva la dirección de la corriente opuesta a la dirección de desplazamiento de los electrones. Esa es la dirección de la *corriente física o convencional* a la que siempre nos referiremos.

En el análisis de circuitos, es necesario para resolver el circuito asignar direcciones de referencia a las corrientes presentes en él. Estas direcciones de referencia se pueden asignar arbitrariamente sin considerar las direcciones de las corrientes físicas, ya que se destinan solo a los efectos del análisis del circuito bajo estudio. Esta libertad se aclarará posteriormente cuando veamos las Leyes de Kirchhoff.

Por otro lado, en caso de que la dirección de la corriente física o convencional sean evidente, conviene hacer coincidir esta dirección con la dirección de la corriente de referencia. Esto es, la corriente convencional fluye *hacia fuera* del terminal positivo de una batería, a través del circuito, y regresa hacia el terminal negativo de la batería. Aun cuando se hagan coincidir, por seguridad, Ud. escriba y resuelva las ecuaciones correspondientes, para evitar confusiones con los signos y resultados.

1.1.3.3 Relación entre carga y corriente

Si sabemos que la corriente en un conductor es $i(t)$, entonces suponemos que la cantidad de carga q que pasa por la sección transversal del conductor durante el periodo $t_1 < t < t_2$ deberá ser:

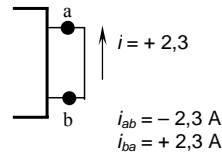


Figura 1.2 Notaciones para expresar la misma corriente



$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt \quad \text{coulombs} \quad (1.8)$$

1.1.4 Tensión Eléctrica

1.1.4.1 Tensión y Trabajo

Retomando lo expresado en la sección 1.1.1, si movemos una carga Q desde el punto A hasta el punto B, dentro de un campo eléctrico, se deberá haber realizado un trabajo W para que ello suceda (una fuerza ejercida sobre una carga a través de una distancia). Entonces, hablaremos de una *diferencia de potencial* o de una *diferencia de tensión* V_{AB} entre dos puntos, igual a:

$$V_{AB} = \frac{W}{Q} \quad (1.9)$$

De este modo, la *tensión eléctrica* entre dos puntos es “el trabajo por unidad de carga” requerido para mover la unidad de carga positiva desde un punto al otro contra la dirección del campo eléctrico, o también, el trabajo realizado sobre la unidad de carga, que se mueve desde un punto al otro en la dirección del campo. Las cargas positivas siempre se mueven desde un punto de potencial mayor (+) a un punto de potencial menor (-), mientras que la inversa es cierta para cargas negativas (electrones).

La unidad de medida de la tensión eléctrica en el sistema MKS es:

$$\text{volts} = \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}} \quad [\text{V}]$$

Una de las características destacables del campo eléctrico es que el trabajo hecho para mover una carga entre dos puntos es independiente del camino seguido. Esto nos permite hablar de un *campo conservativo* y usar el término *potencial*.

1.1.4.2 La tensión como potencial

Veamos el concepto explicado según el esquema de la figura 1.3, que muestra el modelo de un circuito con una batería, un interruptor y un elemento que llamaremos “resistor (R)”, cuya definición se incluye en el punto 1.1.5 y que aquí, conceptualmente, nos permite dar continuidad al circuito de la figura.

Después que se cierra el interruptor, el movimiento de cargas por el circuito efectúa la transferencia de energía de la batería al resistor. El trabajo realizado por el sistema eléctrico al mover una carga desde a hasta b se indica mediante una tensión. En especial, la tensión instantánea de a a b está definida como:

$$v_{ab} = \frac{W_{ab}}{q} \quad (1.10)$$

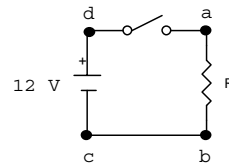


Figura 1.3 Un circuito sencillo



La tensión entre *d* y *c* es 12 V debido a la batería. Con el interruptor abierto en el resistor no existe diferencia de potencial entre sus extremos; en cambio, con el interruptor cerrado se aplica la tensión al resistor.

Con el interruptor abierto, la tensión está aún presente en el circuito. La tensión expresa el *potencial* necesario para realizar trabajo; esto es, mide cuanto trabajo se debería realizar si se moviera una carga desde *a* hasta *b*.

1.1.4.3 Direcciones de referencia de las tensiones

Se usarán dos convenciones para definir la dirección de referencia de las tensiones. La convención más explícita usa dos subíndices, v_{ab} , como corresponde a la ecuación (1.10), para definir el punto inicial o de referencia *a*, el punto final *b* y, por lo tanto, la dirección del recorrido, desde *a* hasta *b*. No obstante, con frecuencia se desea expresar el voltaje de un circuito sobre los extremos de un solo elemento, tal como un resistor. En este caso se pueden marcar ambas terminales del elemento del circuito con los símbolos de polaridad: un + en un terminal y un – en el otro. Con esta notación sencilla, la convención es que el + representa el primer subíndice y el – el segundo subíndice del voltaje.

1.1.4.4 Tensión física

La polaridad física de una tensión es la dirección de referencia que da una tensión positiva. De esta manera, la *tensión física* siempre es positiva y tiene marcas de polaridad asignadas de acuerdo con esta polaridad positiva. Esto es, si la tensión con asignación arbitraria de dirección de referencia +/- resulta numéricamente negativa, la tensión física tendrá dirección opuesta.

La mayor parte de los multímetros o “testers” tienen puntas de prueba negra y roja; la punta negra se marca como el “común”. Dichos multímetros indicarán una tensión positiva cuando el común esté conectado a la marca de polaridad negativa (signo menos) de la tensión física y la punta roja esté conectada a la marca de polaridad positiva (signo más). En la batería de un automóvil, por ejemplo, las marcas en los terminales de la batería son las correspondientes a la tensión física.

1.1.5 Resistencia y Resistores

1.1.5.1 Resistencia, Conductancia y Resistividad

La *resistencia* (*R*) de un conductor es su oposición al flujo de la corriente eléctrica. Es el equivalente eléctrico de la fricción en la mecánica. Un conductor posee la unidad de resistencia de 1 *ohm* (Ω), cuando al circular una corriente de 1 ampere, produce una diferencia de potencial de 1 volt sobre ella.

El valor recíproco de la resistencia se denomina *conductancia* (*G*); es una medida de la facilidad con que puede circular una corriente a través de un conductor determinado (es decir, $G = 1/R$). La unidad de conductancia es el siemens (*S*) también conocido como *mho* (ohm al revés). Un conductor tiene una conductancia de 1 mho cuando una corriente de 1 ampere a través de él produce una caída de potencial de 1 volt.

En la figura 1.4 se muestra el símbolo gráfico de un resistor para representarlo en un circuito, y su abreviatura (*R*). Resistor es el elemento cuya propiedad física es tener resistencia.

Se puede demostrar que la resistencia (*R*) de un alambre de sección uniforme es:



Figura 1.4 Símbolo de la resistencia y su notación.



$$R = \rho \frac{L}{A} \quad [\Omega] \quad (1.11)$$

Donde:

L = longitud

A = área transversal

ρ = resistividad

La *resistividad* ρ se define como la resistencia de un material que tenga la unidad de longitud y la unidad de área transversal. La resistividad establecida en unidades de ohms-centímetros (Ω -cm) se aplica a la resistencia de una determinada clase de alambre de 1 cm de longitud y de 1 cm² de sección transversal.

En los circuitos reales se conectan los distintos componentes por medio de cables (conductores metálicos aislados) y se considera que su sección es suficiente para que presenten una resistencia despreciable a los fines prácticos.

1.1.5.2 Efecto de la temperatura sobre la resistencia

La resistencia de un conductor metálico aumenta al aumentar la temperatura. Dicho aumento depende de la elevación de la temperatura y del coeficiente térmico de resistividad (α), el cual se define como el cambio de resistividad por grado centígrado de variación a una temperatura de referencia que por lo general es 0° C o 20° C. Los semiconductores tienen un coeficiente de temperatura negativo, mientras que muchos metales se tornan superconductores ($\rho = 0$) a pocos grados por encima del cero absoluto [Esto último se ha visto favorecido en gran medida, debido a la continua investigación científica realizada al respecto, que permite la superconductividad a temperaturas mucho mayores que el cero absoluto (0 °K)].

La resistencia (R) para una variación de temperatura (Δt) en °C está dada por:

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta t) \quad (1.12)$$

Donde R_0 es la resistencia a la temperatura de referencia (generalmente 20° C) y α es el coeficiente de temperatura de la resistencia (por ejemplo, un alambre de tungsteno tiene un $\alpha = 0,0045$ a 20° C).

1.1.5.3 Resistores

Un resistor es un componente electrónico que es construido para introducir una cantidad específica de resistencia. La electrónica hace un uso frecuente de los resistores, tal el caso en amplificadores como carga de circuitos activos, en redes de polarización y como elementos de realimentación; conceptos estos que se desarrollarán a lo largo del curso regular de Electrónica.

Existen varios tipos de resistores, ya que no es factible construir un solo tipo que tenga simultáneamente las diferentes características de bajo costo, tamaño reducido, consumo de alta potencia, alta precisión, bajo efecto de temperatura, etc., tal que cumpla con las diversas necesidades de la electrónica.

Un resistor está construido de algún material resistivo (carbón, o un film metálico o de carbón, o un alambre de pobre conductividad) con un conductor terminal en cada extremo, para facilitar su conexión.



Los hay de valor fijo y valor variable (potenciómetros); en este último caso de diferentes tipos según la construcción mecánica que posean (de giro de 300°, multivueltas, axiales, radiales, etc.).

Los símbolos esquemáticos para los resistores fijos y variables están indicados en la figura 1.5

Los resistores están disponibles con resistencias desde $0,01 \Omega$ hasta $10^{12} \Omega$, con capacidad de disipación de potencia estándar desde 1/8 watt hasta 250 watts y tolerancias desde 0,005% hasta 20%. Los resistores más familiares son los de carbón de $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2}$ watt de disipación de potencia. Estos están disponibles en un conjunto de valores estándares que van desde 1Ω hasta $100 M\Omega$ (Millones de ohms), tanto con el 5% como con el 10% de tolerancia. El concepto de potencia está desarrollado en el punto 1.5 de la presente guía de estudio.



Figura 1.5 Símbolos esquemáticos de los Resistores

1.1.5.4 Código de colores en Resistores

Típicamente, los resistores poseen 4 bandas de color sobre su cuerpo, que son usadas para identificar el valor del resistor y su tolerancia. Esto se esquematiza en la figura 1.6

El Código Estándar de Colores está dado en la Tabla 1.1 siguiente, según la cual, si para la figura 1.5 tenemos la siguiente configuración:

1º Dígito Significativo	Marrón
2º Dígito Significativo	Negro
Multiplicador	Rojo
Tolerancia	Plateado

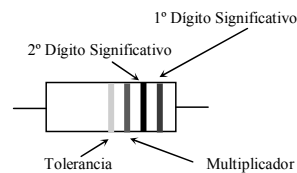


Figura 1.6 Código de colores en Resistores

Esto significa que el valor de su resistencia R es el siguiente:

$$10 \times 100 = 1 K\Omega \text{ con tolerancia } \pm 10\%$$

Tabla 1.1

Color	Banda 1/2	Banda 3	Banda 4
Negro	0	1	--
Marrón	1	10	1 %
Rojo	2	100	2 %
Naranja	3	1000	3 %
Amarillo	4	10000	4 %
Verde	5	100000	--
Azul	6	1000000	--
Violeta	7	10000000	--
Gris	8	100000000	--
Blanco	9	--	--
Oro	--	0,1	5 %
Plata	--	0,01	10 %
Sin color	--	--	20 %



1.2 Ley de Ohm

Veamos de nuevo lo que sucede físicamente en el circuito de la figura 1.3 con el interruptor cerrado. La batería posee una tensión entre sus bornes debido a que la energía química interna ha establecido una acumulación de cargas negativas en un terminal y positivas en el otro. Al cerrar el circuito, las cargas (esto es, los electrones de conducción) están en libertad de moverse a través del cable y el resistor debido a la fuerza ejercida por la diferencia de potencial, dando por resultado una *corriente eléctrica*. Las cargas se mueven a una *velocidad de desplazamiento* que es limitada por los choques de los electrones contra otros electrones y los átomos del material por el que circulan. Esta corriente es proporcional a la *tensión eléctrica* entre los bornes de la batería; por otro lado, la corriente también es inversamente proporcional a los efectos de la fricción o *resistencia* (R).

Este fenómeno se conoce como la *Ley de Ohm*, formulada por George Simon Ohm en 1827:

$$i = \frac{v}{R} \quad \text{o} \quad v = iR \quad (1.13)$$

Donde v es la tensión sobre el resistor, en volts, i es la corriente que pasa por el resistor, en amperes, y R es la resistencia del resistor en ohms.

La ley de Ohm relaciona la tensión con la corriente para los resistores; posteriormente se presentarán otras relaciones tensión-corriente para capacitores e inductores.

En la Figura 1.7 se representa gráficamente la ley de Ohm; este tipo de diagrama es muy usado en el campo de la electrónica y se conoce como *curva característica del dispositivo* (en el presente caso el resistor). En la mayoría de los casos se representa la corriente en las ordenadas y la tensión en el eje de las abscisas, ambas en escala lineal.

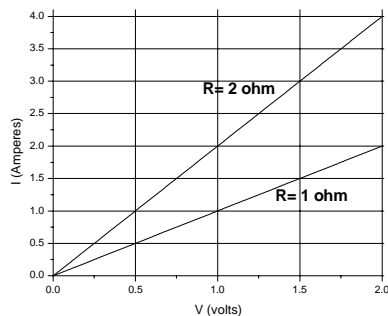


Figura 1.7 Curva característica de dos resistencias

Las características representada en la figura 1.7 corresponden a dos resistencias distintas pero en ambos casos responden a las polarizaciones definidas en la figura 1.8.

En un resistor común el primer cuadrante es la región de interés ya que si se invierte la corriente se invertirá la caída de tensión por ser, en este caso, la resis-

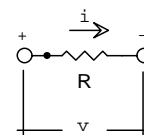


Figura 1.8 Polarización sobre un Resistor



tencia independiente del sentido de la corriente, cosa que no ocurre en otros dispositivos que se estudiarán luego, en el curso regular de Electrónica.

1.2.1 Circuitos Abiertos y Cortocircuitos

En la figura 1.9 se muestran las características de dos valores de resistencias especiales:

- I) Un cortocircuito ($R = 0$) que permite que la corriente fluya ($i \neq 0$) sin ninguna oposición, por lo tanto no hay caída de potencial sobre el cortocircuito ($v = 0$), y
- II) Un circuito abierto ($R = \infty$) que no permite la circulación de corriente ($i = 0$), por lo que la tensión que existe sobre los terminales dependerá de lo que esté conectado a la izquierda del mismo ($v \neq 0$).

Veremos más adelante que, en ambos casos, no se desarrolla potencia en el cortocircuito o en el circuito abierto.

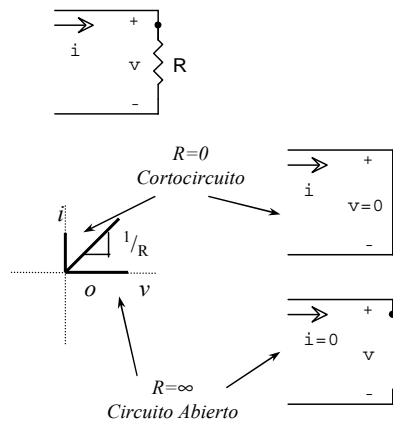


Figura 1.9 Símbolo de circuito y característica gráfica de una resistencia.

1.2.2 Interruptores

Un interruptor ideal es un dispositivo que permite o impide el paso de la corriente eléctrica; lo podemos ver como una resistencia especial que se puede cambiar de cortocircuito a circuito abierto, o viceversa, para ACTIVAR o DESACTIVAR un dispositivo eléctrico. Los interruptores ideales no requieren (demandan) energía eléctrica del circuito. Los interruptores reales presentan una pequeña resistencia.



1.3 Fuente de Tensión y Fuente de Corriente

1.3.1 Fuentes Ideales de Tensión

En la figura 1.10 se muestra el símbolo para una fuente ideal de tensión general y para una fuente ideal de tensión de cc (corriente continua). La *fuente ideal de tensión* mantiene su voltaje prescrito, independiente de su salida de corriente.

En general, una fuente ideal de tensión puede ser constante o variar en el tiempo. Se usa el símbolo de batería para una fuente de tensión constante (cc) y siempre se considera que la tensión de la batería es positiva, según surge de la simbología empleada.

Normalmente, la fuente de tensión debería producir una corriente física de salida del terminal + y así actuar como una fuente que entrega energía al circuito.

Es posible que alguna otra fuente de mayor tensión conectada a la batería pueda forzar la corriente física a *entrar* por el terminal + de la fuente de tensión; de este modo se entrega energía a la fuente. Cuando la fuente de tensión es una batería, la corriente, tal como está definida en la figura 1.10, es negativa y la batería se carga. Esto es válido si la batería es del tipo *secundaria*, como veremos a continuación, y admite la recarga; si no lo es se recalientará, produciendo un deterioro de la misma.

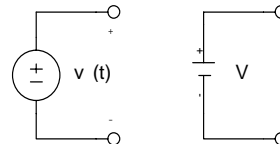


Figura 1.10 Símbolo de fuente ideal de tensión general y de fuente ideal de tensión de cc.

1.3.2 Celdas y Baterías

En el mercado es posible obtener dispositivos que cumplan con las propiedades eléctricas definidas para las fuentes de tensión.

Es posible convertir otras formas de energía (tal como mecánica, química, calor o incluso luz) en energía eléctrica; pero una de las más comunes y simples es la conversión química, que da origen a las *baterías*.

Las baterías se especifican por su tensión y su capacidad nominal en amperes-hora (A-h). El valor nominal de ampere-hora indica cuanto tiempo la batería puede suministrar una corriente particular a su tensión nominal. Por ejemplo, una batería de automóvil con una capacidad de 60 A-h puede proporcionar una corriente de 60 A durante 1 hora (h), o 30 A durante 2 h, o 10 A durante 6 h, etc.

Existen unidades básicas de tensión que se denominan *celdas*. Las baterías pueden estar constituidas de *una celda* o de "*n*" *celdas*. Como veremos más adelante, las pilas de uso doméstico son un ejemplo de celdas unitarias que constituyen, en sí mismas, una batería.

Las celdas, además se clasifican en *primarias* o *secundarias*. Las celdas *primarias* tienen una vida única determinada por su capacidad de A-h y consumo de corriente. Una vez descargadas, simplemente se desechan. El tamaño, la tensión y la capacidad de A-h de cada una están diseñados para satisfacer una necesidad específica o general. Ejemplos de celdas primarias son las de litio, empleadas en relojes, las de iodo-litio usadas en circuitos electrónicos, las de carbono-zinc (hoy en desuso) o las alcalinas-magnesio que se utilizan en linternas y equipos electrónicos comerciales, comúnmente llamadas *pilas*.

Las celdas *secundarias* pueden recargarse, invirtiendo la acción química asociada con la descarga de dichas celdas. La más común y la más antigua de las celdas secundarias es la batería de ácido-plomo, de uso cotidiano en automóviles, la cual puede suministrar una corriente elevada durante un periodo relativamente corto (horas), y está constituida por un conjunto de celdas elementales, según una conexión serie, como se verá más adelante, en el punto 1.3.3.



En otras aplicaciones tales como linternas, afeitadoras, electrodomésticos, instrumentos electrónicos, etc., la celda de níquel-cadmio (Ni-Cad) es la celda secundaria apropiada porque los niveles de corriente son más bajos y el período de consumo continuo generalmente es más largo. Otros dos tipos de celdas secundarias incluyen a las de níquel-hidrógeno y las híbridas de níquel. Las primeras son empleadas en vehículos espaciales y en equipos muy especiales. Las segundas son un híbrido de las de níquel-cadmio y níquel-hidrógeno, que combinan las características positivas de cada una para crear un producto de un alto nivel energético en un paquete pequeño de larga duración; se utilizan en computadoras portátiles. Otras variantes son las de níquel-hidruro de metal y las de ion de litio, que se utilizan en teléfonos celulares.

En relación a que tan a menudo deben recargarse las celdas secundarias, se debe tener en cuenta que, por ejemplo, las de Ni-Cad tienen cierta "memoria" porque, si se recargan continuamente después de usarlas por poco tiempo, posiblemente comiencen a creer que son unidades de corta duración y a no mantener la carga durante el espacio de tiempo nominal. Además, deben evitarse la descarga "dura", la cual se produce cuando se extrae toda la energía de una celda, ya que si se experimentan demasiados ciclos de descarga dura se reducirá el ciclo de vida de la misma.

Por último, se debe tener en cuenta que el proceso de carga de las baterías de plomo-ácido se realiza con una fuente de tensión constante, que permite que la corriente varíe según el estado de la batería. En cambio, las celdas de Ni-Cad se cargan con una fuente de corriente constante cuya tensión terminal se mantiene estable durante todo el ciclo de carga. La capacidad de la celda, en este último caso, se incrementa casi linealmente durante la mayor parte del ciclo de carga.

1.3.3 Celdas en Serie y en Paralelo

Las celdas pueden interconectarse en *serie* o en *paralelo*.

Si se necesita más tensión que la que produce una sola celda, pueden conectarse dos o más en *serie*, tal como se indica en la figura 1.11, donde el borne – de la celda superior se conecta con el borne + de la celda que se encuentra debajo, en el dibujo, y así sucesivamente, quedando libres al final el borne + de la 1ª celda y el borne – de la última celda; entre dichos extremos se toma la tensión final.

La corriente deberá, por consiguiente, circular a través de cada una de las celdas, mientras tanto, sus tensiones se sumarán. En el caso de la figura, la tensión total será de $3 \times 1,5$ o, lo que es lo mismo, de 4,5 volts. La capacidad de corriente que maneje el conjunto de las celdas será el mismo que el de una de las celdas individuales.

Supóngase el caso de que la tensión de una celda individual sea suficiente, pero se necesite mayor capacidad de corriente. En ese caso deberán conectarse las celdas necesarias en paralelo, como se indica en la figura 1.12, tal que se incrementa la capacidad de suministrar corriente sin afectar la tensión resultante. Aquí se deben unir todos los bornes + entre sí y, por otro lado, todos los bornes – entre sí; la tensión se toma entonces, entre todos los bornes + y todos los bornes –. En el caso del ejemplo, 3 celdas o baterías alcalinas del tipo C (500 mA/h c/u) pueden entregar hasta 1.500 mA (1,5 A). No se deben mezclar distintos tipos de celdas.

No hay que olvidar que la cantidad de corriente drenada desde una celda está determinada por la demanda de la carga del circuito que se está alimentando; pero las celdas tienen límites definidos sobre el valor máximo de corriente que pueden entregar. Corrientes demasiado elevadas pueden reducir prematura-

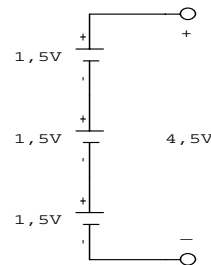


Figura 1.11 Celdas en serie

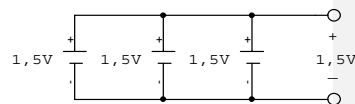


Figura 1.12 Celdas en paralelo



mente la vida útil de la celda o batería o, más aún, dañarla. La conexión paralela de celdas es poco empleada en la práctica, ya que cuando se requiere mayores capacidades de corrientes se pueden emplear otros tipos de fuentes de potencia.

Si se necesitan mayor tensión y mayor corriente, se puede usar ambas técnicas (serie y paralelo) simultáneamente.

1.3.4 Fuentes ideales de Corriente

En la figura 1.13 se muestra el símbolo para una fuente ideal de corriente. La *fente ideal de corriente* produce su corriente prescrita, independiente de su voltaje de salida. Como en la fuente ideal de tensión, una fuente ideal de corriente entrega cualquier cantidad requerida de energía.

A diferencia de la fuente de tensión, no existe en el mercado un elemento que se asemeje a las propiedades eléctricas de una fuente de corriente; sin embargo, se pueden construir dispositivos electrónicos que actúen como fuentes de corriente y esta idea es útil, incluso en el análisis de circuitos.

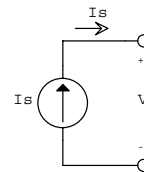


Figura 1.13 Símbolo de fuente ideal de corriente.

1.4 Resistencia Interna en Fuentes de Tensión y Regulación de Tensión

Las fuentes ideales de tensión producen una tensión de salida constante, sin importar la carga conectada a sus bornes. Esto se ejemplifica en la figura 1.14, donde la resistencia interna de la fuente ideal de tensión es nula ($R_i=0$).

Las fuentes ideales solo existen como dispositivos teóricos. Las fuentes de laboratorio no son ideales y tienen una *resistencia interna*, producto de los elementos y circuitos internos que poseen constitutivamente. Para explicarlo de otra manera, analicemos el circuito de la figura 1.15 y supongamos que la resistencia de carga R_C tiende a cero, entonces la corriente por la carga tenderá a infinito; ninguna fuente real de tensión puede producir una corriente infinita, ya que la corriente se ve limitada por la resistencia interna (R_i) de dicha fuente.

Por ejemplo, una pila alcalina para linterna tiene una resistencia interna menor de $1\ \Omega$, una batería de automóvil tiene una resistencia interna menor que $0,1\ \Omega$ y una fuente electrónica de tensión puede tener una resistencia interna menor que $0,01\ \Omega$.

La corriente por la carga tiene que circular por la resistencia interna de la fuente de tensión. Debido a esto, se produce cierta caída de tensión en esa resistencia interna. Esto significa que la tensión en la carga es siempre menor que la tensión ideal. Cuando la resistencia de la carga es grande comparada con la resistencia interna de la fuente, la caída de tensión en esta última es tan pequeña que pasa inadvertida. Se toma el criterio de que si R_i es, por lo menos, 100 veces menor que la R_C , entonces se desprecia el efecto de R_i y se asume que la fuente es una *fente de tensión constante*.

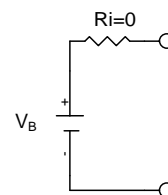


Figura 1.14 Fuente ideal de tensión

Con formato

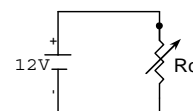


Figura 1.15 Fuente de tensión con carga

Aquí se puede introducir otro concepto importante, el de *Regulación de Tensión*.

La figura 1.16 muestra un circuito básico y la característica ideal de tensión, conjuntamente con la característica real.

Idealmente, la tensión de salida de la fuente es V_B y la tensión a los bornes de la fuente V_e es también igual a V_B .

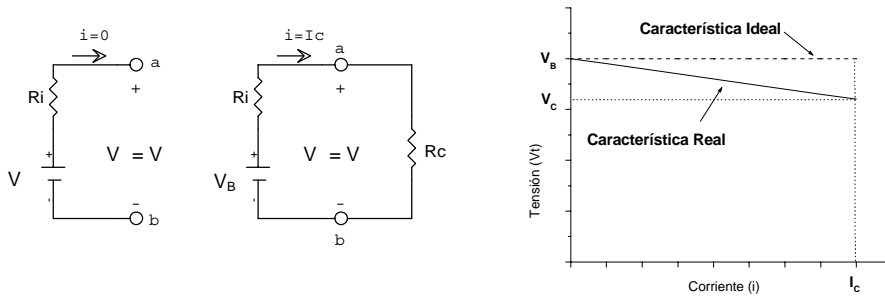


Figura 1.16 Circuito básico y característica ideal y real de la tensión aplicada en la carga R_c .

Si se analiza ahora la característica real, se observa que la tensión disponible en los terminales de la fuente, *sin carga* conectada, es $V_e = V_B$, ya que al no haber circulación de corriente, no hay caída de tensión a través de R_i . Cuando se aplica un carga, sin embargo, y se ajusta de modo que la corriente que circula por la carga se incrementa a su valor nominal, la caída de tensión interna se incrementa y la tensión a los bornes de la fuente (o a través de la carga) disminuye, siendo $V_e = V_C < V_B$, donde V_C es la tensión a los bornes de la fuente en condiciones nominales (con plena carga).

Como vemos en la figura 1.16, mientras menor sea la resistencia interna, la característica más se aproximará a la situación ideal y mejor será la fuente. La pendiente de la curva se conoce como la *regulación de tensión* (RV) definida por la siguiente ecuación:

$$RV = \frac{V_B - V_C}{V_C} \times 100\% \quad (1.14)$$

Las fuentes con regulaciones de voltaje del 0,1% son bastantes comunes.

Otra forma de expresar los efectos de una resistencia de carga R_c sobre la salida de una fuente de tensión, cuando aquella es menor o al menos comparable con la resistencia interna R_i , de dicha fuente, es a través de la siguiente gráfica.

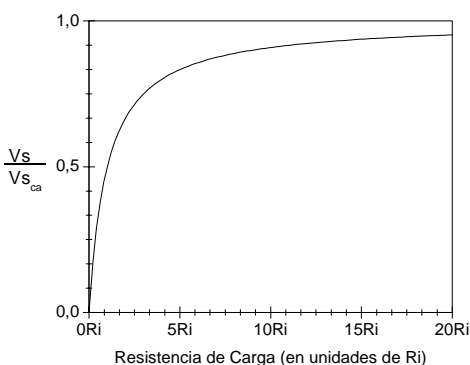


Figura 1.17 Relación (tensión de salida / tensión a circuito abierto), en función de la resistencia de carga.



Donde V_S es la tensión de salida y V_{Sca} es la tensión de salida a circuito abierto.

En la figura 1.17 se observa que la resistencia de carga debe ser grande, comparada con la resistencia interna de la fuente ($R_C \gg R_i$), para evitar que la señal de salida se atenúe y sea menor que la tensión de circuito abierto.

1.5 Resistencia Interna en Fuentes de Corriente y Regulación de Corriente

Tal como lo observamos en el punto 1.4, las fuentes ideales de corriente, producen una corriente de salida constante, sin importar la carga conectada a sus bornes. Esto se ejemplifica en la figura 1.18, donde la resistencia interna de la fuente ideal de corriente es infinita ($R_i = \infty$).

Las fuentes ideales de corriente solo existen como dispositivos teóricos. Las fuentes de laboratorio de corriente, no son ideales y tienen una *resistencia interna*, por causas semejantes a las indicadas para las fuentes de tensión.

La corriente de la fuente tiene que dividirse y circular por la carga y por la resistencia interna de la fuente ($R_i < \infty$). Debido a esto, la corriente en la carga es siempre menor que la corriente ideal. Cuando la resistencia de la carga es pequeña comparada con la resistencia interna de la fuente, la proporción de la corriente que se deriva por esta última es tan pequeña que pasa inadvertida. Se toma el criterio de que si R_i es, por lo menos, 100 veces mayor que la R_c , entonces se desprecia el efecto de R_i y se asume que la fuente es una *fuerza de corriente constante*.

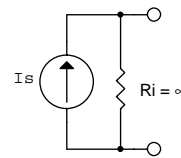


Figura 1.18 Fuente ideal de corriente

Aquí también puede introducirse el concepto de *Regulación de Corriente*, de manera análoga a lo establecido para las fuentes de tensión, estando determinada dicha regulación por una ecuación cuyo formato es igual al de la ecuación (1.14).

1.6 Potencia Eléctrica, Energía y Calor

Si una carga positiva Q se mueve desde el terminal positivo al terminal negativo de la fuente a través de un circuito externo, la fuente efectúa un trabajo W igual a VQ , tal cual lo establecido en la ecuación 1.9. La *Potencia* (P) establece la relación entre el trabajo y el tiempo empleado en hacer ese trabajo o, de otra manera, indica la velocidad a la que se convierte la energía (trabajo). Por ejemplo, en una pila es la velocidad de conversión de la energía química en energía eléctrica.

Entonces, la potencia P entregada a una carga cuando circula una corriente I debido a una diferencia de tensión V entre sus extremos (para una corriente constante) será:

$$P = \frac{W}{t} = V \left(\frac{Q}{t} \right) = VI \quad [J/s] \quad (1.15)$$

En general, la potencia instantánea está dada por:

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = v(t) \times i(t) \quad (1.16)$$



Por lo tanto, el intercambio de energía en un periodo $t_1 < t < t_2$ se puede calcular mediante una integral:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, i(t) \, dt \quad [J] \quad (1.17)$$

Si la tensión se aplica a una resistencia, entonces la Ley de Ohm da dos posibilidades de expresar la potencia disipada en forma de calor por el resistor:

$$P = I^2 R \quad \text{o} \quad P = \frac{V^2}{R} \quad (1.18)$$

Cuando la corriente está en amperes, la tensión en volts y la resistencia en ohms, la potencia resultante está en *watts* [W].

1.7 Circuitos Serie y Paralelo

1.7.1 Circuito Serie

Si se conectan varios componentes eléctricos, tales como resistencias, de manera que la corriente que circule por todos ellos sea la misma, se dice que los componentes constituyen un *circuito serie*. En la figura 1.19 se muestra la conexión en serie de tres (3) resistencias y una batería.

Para resistores conectados en serie, la *resistencia total* es la suma de las resistencias individuales. Es decir:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N \quad (1.19)$$

Para el caso particular de N resistencias (R) iguales conectadas en serie, la resistencia total (R_T) está dada por:

$$R_T = NR \quad (1.20)$$

Al comienzo definimos que en un circuito serie la corriente es la misma, por lo tanto, la corriente I se determina por la Ley de Ohm:

$$I = \frac{V_B}{R_T} \quad (1.21)$$

Además, la corriente I origina una caída de tensión entre los terminales de cada resistencia, dada también por la Ley de Ohm. Es decir:

$$V_1 = R_1 I \quad V_2 = R_2 I \quad V_3 = R_3 I \quad (1.22)$$

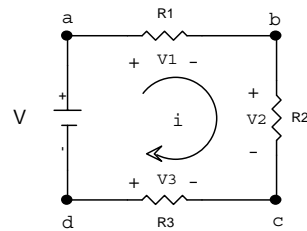


Figura 1.19 Circuito Serie simple



Nótese la polaridad de V_1 , V_2 y V_3 en la figura 1.19, determinada por la dirección de la corriente resultante.

La potencia proporcionada por la fuente de tensión es:

$$P_T = V_B I$$

Y la potencia proporcionada a cada elemento es:

$$P_1 = I^2 R_1 \quad P_2 = I^2 R_2 \quad P_3 = I^2 R_3$$

Por lo que se deduce que:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 \quad (1.23)$$

1.7.1.1 Ley de Tensiones de Kirchhoff

La Ley de Tensiones de Kirchhoff establece que:

La suma algebraica de las tensiones alrededor de una malla es igual a cero.

Se entiende por *tensiones* a las fuentes de tensión y caídas de tensión en las resistencias.

Una malla es cualquier trayectoria continua que se describe saliendo de un punto en una dirección y regresando al mismo en otra dirección, sin dejar el circuito.

Aplicando la Ley de Tensiones de Kirchhoff al circuito de la figura 1.19 se tiene:

$$V_{ad} + V_{ba} + V_{cb} + V_{dc} = V_S - V_1 - V_2 - V_3 = 0 \quad (1.24)$$

O lo que es lo mismo:

$$V_B = V_1 + V_2 + V_3 \quad (1.25)$$

Esto indica que la tensión aplicada a un circuito en serie es igual a la suma de las caídas de tensión a través de los elementos en serie.

1.7.1.2 Regla del Divisor de Tensión

Es interesante observar en la figura 1.19 que la tensión sobre un resistor es una función directa de su magnitud, comparado con los demás elementos en serie. Por ejemplo, si $R_3 = 2R_1$, la tensión V_3 es dos (2) veces V_1 .

La *regla del divisor de tensión* permite calcular la tensión a través de una resistencia o una combinación de resistencias en serie, sin que primero se deba resolver la corriente. Para demostrar este concepto, analicemos nuevamente el circuito de la figura 1.19:

$$I = \frac{V_B}{(R_1 + R_2 + R_3)} = \frac{V_B}{R_T}$$

y también

$$I = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_3}{R_3} = \frac{V_X}{R_X}$$

Donde V_B es la tensión aplicada a través del circuito en serie y R_T es la resistencia total del circuito en serie. Además, V_X es la caída de tensión sobre el resistor R_X o una combinación de resistencias en serie cuya resistencia total es R_X .

Igualando ambas ecuaciones anteriores puede deducirse que:

$$V_x = \frac{R_x V_B}{R_T} \quad (1.26)$$

Veamos un ejemplo particular, cuando se tienen dos resistencias conectadas según la figura 1.20.

Aquí tendremos que la tensión de salida V_c es igual a:

$$V_c = \frac{R_2 V_B}{R_T} = \frac{R_2 V_B}{(R_1 + R_2)} = \frac{10K \times 12V}{(5K + 10K)} = 8V$$

O lo que es lo mismo:

$$V_c = \frac{2}{3} V_B$$

1.7.2 Circuito Paralelo

Cada ley o regla proporcionada anteriormente para los circuitos en serie, tienen su contraparte en las redes en paralelo. Una vez que se entiendan con claridad el análisis de cada tipo (serie y paralelo), se podrá abordar la solución de sistemas y configuraciones más complicadas.

Se dice que dos elementos están en *paralelo* si estos tienen dos terminales en común.

En la figura 1.21 R_1 y R_2 están en paralelo puesto que están conectados por ambos extremos. Esto también es cierto para R_2 y R_3 , R_1 y R_3 , V_S y R_1 , y así sucesivamente. De hecho, todos los elementos que aparecen en la figura 1.21 están en paralelo.

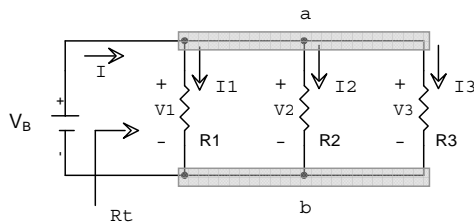


Figura 1.21 Circuito Paralelo simple

Para las resistencias en paralelo, la resistencia total es determinada por:

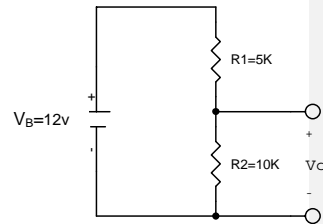


Figura 1.20 Ejemplo de Divisor de Tensión



$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad (1.27)$$

Nótese que la ecuación no es para R_T sino para $1/R_T$, por lo que se tiene que determinar la inversa de la suma.

Como vimos en el punto 1.1.5.1, la conductancia G es igual a:

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.28)$$

Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación (1.27), se tiene:

$$G_T = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_N \quad (1.29)$$

Es particularmente importante comprender que *la resistencia total de resistencias en paralelo siempre es menor que el valor de la resistencia más pequeña*.

Para el caso particular de tener solo dos resistores en paralelo, tal como se indica en la figura 1.22, puede emplearse la ecuación (1.27) para derivar la siguiente expresión para la resistencia total:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.30)$$

Para el caso particular de N resistencias (R) iguales en paralelo, la resistencia total (R_T) está dada por:

$$R_T = \frac{R}{N} \quad (1.31)$$

Se vio que en un circuito serie la corriente es la misma a través de cada elemento. De manera análoga, para circuitos en paralelo, *la tensión sobre los elementos en paralelo siempre es la misma*.

En el caso de la figura 1.21 esto significa que:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_B \quad (1.32)$$

La corriente que entrega la fuente de tensión en la figura 1.21 se calcula como sigue:

$$I = \frac{V_B}{R_T} \quad (1.33)$$

La cual tiene el mismo formato de la ecuación (1.21) del circuito serie.

Además, la tensión V_B genera una corriente en cada rama igual a:

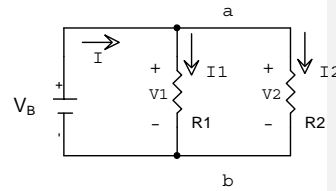


Figura 1.22 Circuito con 2 resistencias en paralelo



$$I_1 = \frac{V_B}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_B}{R_2} \quad I_3 = \frac{V_B}{R_3} \quad (1.34)$$

Es de destacar que las corrientes a través de elementos iguales en paralelo son iguales. Asimismo, la corriente busca la trayectoria de menor resistencia, por lo que será mayor en la rama con menor resistencia.

La potencia proporcionada por la fuente de tensión es:

$$P_T = V_B I$$

Y la potencia proporcionada a cada elemento es:

$$P_1 = \frac{V_1^2}{R_1} \quad P_2 = \frac{V_2^2}{R_2} \quad P_3 = \frac{V_3^2}{R_3}$$

Por lo que se deduce que:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 \quad (1.35)$$

1.7.2.1 Ley de Corrientes de Kirchhoff

La Ley de Corrientes de Kirchhoff establece que:

La suma algebraica de las corrientes que entran a un nodo debe ser igual a la suma algebraica de las corrientes que salen.

$$\sum I_{de\ entrada} = \sum I_{de\ salida} \quad (1.36)$$

Aplicando la Ley de Corrientes de Kirchhoff a la figura 1.21, y considerando que la corriente I entra al terminal a y las corrientes I_1 , I_2 e I_3 abandonan la misma unión, se tiene:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (1.37)$$

1.7.2.2 Regla del Divisor de Corriente

Para las dos resistencias en paralelo de la figura 1.22, las corrientes I_1 e I_2 se determinan a partir de la corriente I de la fuente de tensión, mediante la *regla del divisor de corriente*, sin que primero deba resolverse la caída de tensión. Para demostrar este concepto, analicemos nuevamente el mencionado circuito:

$$V_B = I R_T = I (R_1 \parallel R_2) = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

y también:

$$V_B = I_1 R_1 = I_2 R_2$$



Donde V_B es la tensión aplicada al circuito y R_T es la resistencia total del circuito. Además, I_1 e I_2 son las corrientes que circulan sobre los resistores R_1 y R_2 , respectivamente.

Igualando ambas ecuaciones anteriores puede deducirse que:

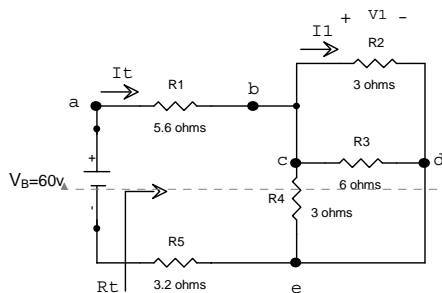
$$\boxed{I_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2}} \quad \boxed{I_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2}} \quad (1.38)$$

En otras palabras, la ecuación (1.38) afirma que la corriente a través de una de las dos ramas en paralelo es igual al producto de la resistencia de la otra rama por la corriente de entrada total, dividida por la *suma* de las dos resistencias en paralelo.

1.7.3 Circuito Serie-Paralelo

Existe una variedad infinita de redes o circuitos combinados en serie y en paralelo. El análisis o resolución de cualquiera de estos circuitos, formados por resistencias y baterías, es posible hacerlo agrupando elementos en pequeños conjuntos, encontrar luego su equivalente y estos agruparlos para resolver entonces la red sin resolver la red en forma global. Posteriormente, los teoremas que se verán más adelante simplificarán el análisis necesario para resolver estos circuitos.

Por ejemplo, considérese el circuito de la figura 1.23.



Con formato

Figura 1.23 Ejemplo de circuito serie-paralelo

La tensión de la batería V_B y las resistencias R_1 y R_5 forman una trayectoria en serie, ya que la corriente que circula por ellas es la misma. Las resistencias R_2 y R_3 están en paralelo porque ambos comparten los puntos c y d . Examinando cuidadosamente el circuito se determina que R_3 y R_4 también están en paralelo, ya que comparten los puntos c y d (o e , que es el mismo punto).

La red puede volverse a dibujar, como se muestra en la figura 1.24, sin alterar las cantidades desconocidas de R_T , I_T , I_1 y V_1 . Nótese que las resistencias en serie fueron combinadas ($5.6 \Omega + 3.2 \Omega = 8.8 \Omega$) junto con las resistencias en paralelo R_3 y R_4 ($6 \Omega \parallel 3 \Omega = 2 \Omega$).

Ahora es más obvio que la combinación en paralelo de las resistencias de 3Ω y de 2Ω están en serie con la resistencia de 8.8Ω .

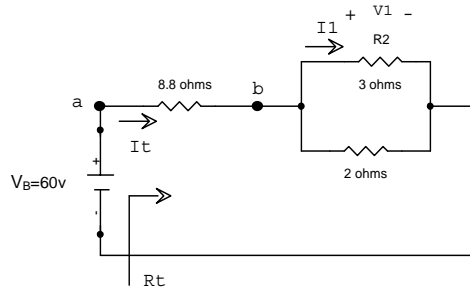


Figura 1.24 Simplificación del ejemplo de la figura 1.23

Para determinar R_T primero se deben combinar los elementos en paralelo:

$$3\ \Omega \parallel 2\ \Omega = \frac{3\ \Omega \times 2\ \Omega}{3\ \Omega + 2\ \Omega} = \frac{6\ \Omega^2}{5\ \Omega} = 1.2\ \Omega$$

y los elementos en serie:

$$R_T = 8.8\ \Omega + 1.2\ \Omega = 10\ \Omega$$

La corriente entregada por la fuente es:

$$I_T = \frac{V_B}{R_T} = \frac{60\ V}{10\ \Omega} = 6\ A$$

La corriente I_1 , por ejemplo, se determina por la ecuación (1.38), de la regla del divisor de corriente:

$$I_1 = \frac{2\ \Omega \times I_T}{2\ \Omega + 3\ \Omega} = \frac{2 \times 6\ A}{5} = \frac{12\ A}{5} = 2.4\ A$$

La potencia disipada en forma de calor en la resistencia R_2 se determina por:

$$P_{R_2} = I_1^2 R_2 = (2.4\ A)^2 \times 3\ \Omega = 17.28\ W$$

Y la potencia entregada por la fuente de tensión es:

$$P_S = V_B I_T = 60\ V \times 6\ A = 360\ W$$

Se puede demostrar que la suma de las potencias disipadas por cada elemento resistivo es igual a la potencia provista por la fuente de tensión:



$$P_S = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5}$$

Se observa que en la red que se acaba de analizar, la configuración final, después de que se consideraron las partes pequeñas, es un circuito serie. Otros circuitos podrán dar como resultado una configuración final en paralelo.

1.8 Inductores y Capacitores

Hasta ahora el resistor ha sido el único dispositivo pasivo examinado en detalle. Dos elementos de importancia en el diseño de los sistemas y circuitos eléctricos y electrónicos son el inductor y el capacitor.

Ambos son bastante diferentes del resistor en el sentido de que el resistor disipa, en forma de calor, toda la energía que recibe, mientras que el inductor y el capacitor, en una situación ideal, almacenan toda la energía que reciben. La energía, por lo tanto, puede ser regresada al sistema o circuito eléctrico cuando el diseño lo requiere. Además, mientras la tensión y la corriente en un resistor están relacionados por la constante R (Ley de Ohm), la tensión y la corriente de un inductor o capacitor están relacionados ya sea por una integral o por una ecuación diferencial.

Aunque esta consideración sugiere una mayor dificultad con la matemática asociada con estos elementos, existen otros métodos (que se presentarán en el próximo capítulo de *circuitos de corriente alterna*) que reducen al mínimo la complejidad.

Aquí nos ocuparemos de las características y la respuesta de los inductores, mientras que en el próximo punto nos ocuparemos de los capacitores.

1.8.1 Inductancia e Inductores

El elemento *inductor* es, fundamentalmente, una bobina de alambre como la mostrada en la figura 1.25, con o sin un núcleo en el centro. Cuando el interruptor está cerrado, la corriente i_L pasa por el alambre de la bobina y establece un campo magnético que *enlaza* (pasa a través) la bobina, como se muestra en la figura 1.25.

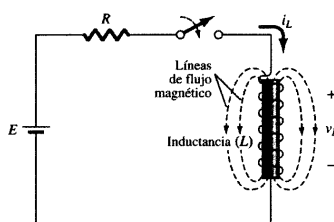


Figura 1.25 Red inductiva en serie



Sin entrar en detalle, las líneas de flujo magnético que se muestran en la figura, son líneas continuas que indican, mediante su densidad, la fuerza de un campo magnético en una zona en particular.

En una red inductiva hay un intercambio entre la energía eléctrica de la red y el campo magnético de los elementos inductivos. El inductor, en una situación ideal, *no disipa la energía eléctrica* sino que la almacena en una forma (un campo magnético) que puede ser regresada al sistema eléctrico cuando se requiera. Si el inductor no es ideal hay una porción de energía que se disipa en la resistencia de cc, del propio alambre que forma las espiras de la bobina, pero esta pérdida muy a menudo se desprecia.

La inductancia L de la bobina es una medida de la velocidad del cambio de flujo magnético establecida por un cambio de corriente a través del inductor. En otras palabras, a mayor inductancia, mayor el cambio en el flujo que enlaza una bobina provocado por la corriente que circula por dicha bobina. Esto puede expresarse mediante la siguiente ecuación:

$$L = N \frac{d\Phi}{di} \quad (1.39)$$

Donde L es la inductancia de la bobina, N es el número de espiras de la bobina, Φ es el flujo magnético e i la corriente instantánea que circula por la bobina.

Esto se puede observar mejor si se analiza la ecuación que muestra la relación entre la tensión y la corriente instantánea en un inductor:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (1.40)$$

Aquí, la magnitud de la tensión v_L es directamente proporcional a la velocidad del cambio de la corriente a través de la bobina y no simplemente a la magnitud de la corriente a través de la bobina. En otras palabras, con una tensión de cc aplicada, la corriente no cambia después de que se alcanzan las condiciones de estado estacionario, y la tensión v_L decae a cero.

La energía almacenada por un inductor está dada por:

$$W_L = \frac{1}{2} L I^2 \quad (1.41)$$

Donde I es la corriente de estado estacionario del inductor.

El símbolo para el inductor (fijo y variable) aparece en la figura 1.26.

Los inductores en *serie* (figura 1.27) tienen un valor de inductancia total determinado de la misma manera que para los resistores en serie. Esto es,

$$L_T = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N \quad (1.42)$$



Figura 1.26 Símbolos gráficos del inductor

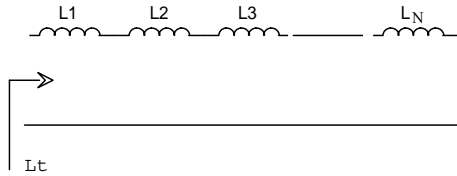


Figura 1.27 Inductores conectados en serie

Para los inductores en *paralelo* (figura 1.28), la inductancia total se determina de la misma manera que para los resistores en paralelo. Esto es,

$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (1.43)$$

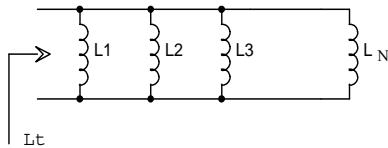


Figura 1.28 Inductores conectados en paralelo

Mientras que para dos inductores en paralelo, tendremos:

$$L_T = \frac{L_1 \times L_2}{L_1 + L_2} \quad (1.44)$$

Tal como dijimos, *el inductor no es un dispositivo ideal*. Además de su inductancia, posee una cierta *resistencia de cc* debido al alambre de pequeño diámetro que conforma las espiras de la bobina (algunas bobinas poseen cientos de espiras). Además, existe una *capacitancia parásita* entre las vueltas paralelas del alambre conductor de la bobina (el concepto de capacitancia lo desarrollaremos en el próximo punto). La adición de estos dos elementos da por resultado el circuito equivalente mostrado en la figura 1.29. Sin embargo, para muchas aplicaciones prácticas, puede utilizarse el concepto de inductor ideal.

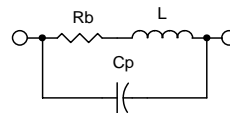


Figura 1.29 Circuito equivalente de un inductor real

1.8.1.1 Constante de Tiempo en circuitos RL

Consideremos nuevamente el circuito de la figura 1.25. En el inductor **la corriente i_L no puede cambiar de manera instantánea**, ya que se requiere de un tiempo antes de que la corriente pueda alcanzar su valor máximo continuo. Por ello, los inductores son útiles para "alisar" o evitar las corrientes de sobrecarga transitorias, que pueden dañar a circuitos o sistemas.



La ecuación de i_L es, en este caso, igual a:

$$i_L = \frac{V_B}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (1.45)$$

Donde τ es la llamada *constante de tiempo* del circuito y es igual a:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad [\text{s}] \quad (1.46)$$

Donde L es la *inductancia* de la bobina o inductor, medida en *henrys* (H), y R es la resistencia inserta en el circuito de la figura 1.25, medida en *ohms* (Ω). Aquí se desprecia el valor de la resistencia de la propia bobina.

Para la mayoría de las aplicaciones prácticas, el tiempo o periodo necesario para que la corriente alcance su valor máximo estable es aproximadamente igual a 5τ .

Nótese en la ecuación (1.45) que el valor final es V_B/R , el cual es independiente del inductor. De hecho, cuando la corriente alcanza su valor final, la tensión a través de L es cero. El inductor, por lo tanto y a partir de ese momento, puede ser reemplazado por un *cortocircuito*; esto es válido cuando V_B es una fuente de cc. En la figura 1.30 se muestra una gráfica de la ecuación (1.45).

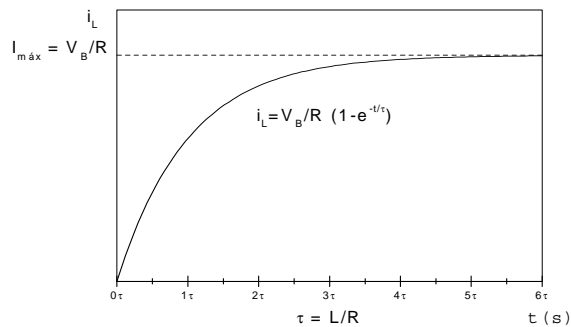


Figura 1.30 Gráfica de la ecuación (1.45)

1.8.2 Capacitancia y Capacitores

En su forma más simple, el *capacitor* se compone de dos superficies conductoras separadas por un dieléctrico (un tipo de aislante) como se muestra en la figura 1.31.

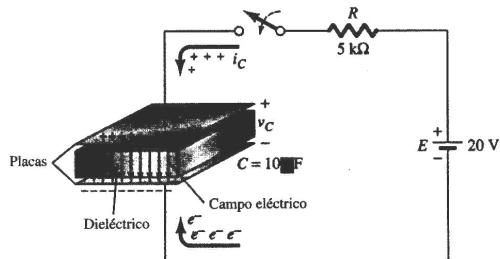


Figura 1.31 Carga de un capacitor

La designación de *capacitor* proviene de la *capacidad* del elemento de almacenar una carga en sus placas. Mientras mayor sea su capacitancia (C), más carga (Q) se depositará en sus placas con el mismo voltaje (V) entre ellas. En forma de ecuación, la capacitancia se define como:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (1.47)$$

Donde la capacitancia viene expresada en *faradio* (F); aunque los microfaradios (μF) y los picofaradios (pF) son magnitudes más comunes de unidades comercialmente disponibles.

Supongamos que, para el circuito de la figura 1.31, las placas inicialmente están descargadas y el interruptor abierto. Al cerrar el interruptor, los electrones relativamente libres en la superficie conductora de la placa superior son atraídos hacia el lado positivo de la fuente de cc aplicada, dejando detrás una carga positiva neta en la placa superior. De la misma manera, el lado negativo de la fuente establece una carga negativa neta en la placa inferior. El resultado de este flujo de carga de la fuente al capacitor, es una corriente i_C que inicialmente es alta a un valor limitado por el resistor R y luego disminuye hacia cero.

En otras palabras, la velocidad de carga de las placas al principio es muy intensa y luego disminuye con bastante rapidez a cero. El resultado de las cargas depositadas en ambas placas es un *campo eléctrico*, tal como se observa en la figura 1.31, que se extiende desde las cargas positivas a las cargas negativas.

Una característica importante del capacitor es que la corriente i_C no está relacionada directamente con la magnitud de la tensión a través del capacitor sino con su *velocidad de cambio* a través de éste. Es decir, mientras más rápido cambie la tensión a través del capacitor, mayor es la i_C resultante. Por ejemplo, si se aplica una tensión de cc, luego del transitorio de carga del capacitor, este queda cargado a la tensión de la batería por lo que la corriente será cero. En forma de ecuación, i_C y v_C están relacionados por medio de la ecuación siguiente:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (1.48)$$



Donde dv_C/dt es una medida de la velocidad instantánea de cambio de v_C con el tiempo. La ecuación indica con claridad que si v_C no cambia, $dv_C/dt = 0$ y por lo tanto i_C será cero.

El capacitor ideal *no disipa* la energía que recibe sino que simplemente la almacena en la forma de un campo eléctrico, que puede ser regresada al sistema en cualquier momento como energía eléctrica.

La energía almacenada en el capacitor está dada por:

$$W_c = \frac{1}{2} C V^2 \quad [\text{joules}] \quad (1.49)$$

Donde V es la tensión de estado constante a través del capacitor.

El símbolo para el capacitor (fijo y variable) aparece en la figura 1.32.

Los capacitores conectados en paralelo se consideran como resistores en serie, cuando se trata de determinar la capacitancia total. Es decir, para los capacitores de la figura 1.33, la capacitancia total está dada por:

$$C_T = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N \quad (1.50)$$

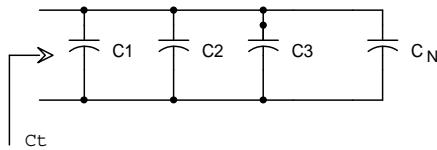


Figura 1.33 Capacitores conectados en paralelo

Para los capacitores en serie, en cambio, la ecuación se relaciona directamente con aquella obtenida para resistores en paralelo. Es decir, para los capacitores de la figura 1.34, la capacitancia total está dada por:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad (1.51)$$

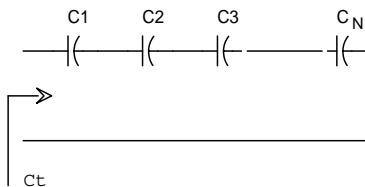


Figura 1.34 Capacitores conectados en serie

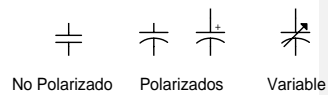


Figura 1.32 Símbolos gráficos del capacitor.



Para el caso de dos capacitores en serie, de manera similar al caso de dos resistores en paralelo, tendremos:

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (1.52)$$

Algunos de los tipos más comunes de capacitores incluyen como material dieléctrico al aire, la cerámica, la mica y un tipo de sustancia llamada "electrolito", que puede ser sólida o líquida. La construcción básica de cada uno de los capacitores comerciales se inclina hacia hacer máxima la capacitancia pero limitando, al mismo tiempo, su tamaño.

Los capacitores no son ideales y, aunque se coloca un aislante (dieléctrico) entre las placas, hay un flujo de carga muy pequeño entre las placas llamado *corriente de fuga*. Si un capacitor está completamente cargado y luego se retira del circuito y se deja a un lado, sin conexión, éste será capaz de conservar la carga solo durante un tiempo limitado, debido a la corriente de fuga resultante a través del dieléctrico, que dejará sin cargas a las placas. El tipo de capacitor determina la velocidad de la descarga. Los de mica y de cerámica tienen pequeñas corrientes de fuga, mientras que los electrolíticos se descargan en un corto periodo de tiempo.

Aquí también se le puede asociar al capacitor ideal una *resistencia parásita*, que justifica la corriente de fuga y una *inductancia parásita*, que se genera como consecuencia del tipo constructivo del capacitor (por ejemplo, en los capacitores de cerámica, las dos superficies conductoras se "laminan" juntas, con el dieléctrico de cerámica entre éstas, y se arrollan apareciendo una inductancia entre cada espira concéntrica). La adición de estos dos elementos da por resultado el circuito equivalente mostrado en la figura 1.35, válido para un *capacitor real*. Sin embargo, para muchas aplicaciones prácticas, puede utilizarse el concepto de capacitor ideal.

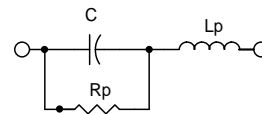


Figura 1.35 Circuito equivalente de un capacitor real.

1.8.2.1 Constante de Tiempo en circuitos RC

Volviendo a la figura 1.31, observamos que la carga no puede fluir de una placa a la otra debido al aislante que hay entre dichas placas. Lo que en realidad sucede es que al aplicarse un campo eléctrico entre las placas, producto de la tensión de la fuente del circuito, se produce un flujo de cargas libres del propio aislante, tendiente a equilibrar el campo eléctrico presente en las placas; esto provoca un flujo neto de cargas, que no es instantáneo. Como la tensión se relaciona con la carga según la ecuación 1.47 y la carga de las placas no aparece de manera instantánea, se deduce que **la tensión v_C de un capacitor no puede cambiar de manera instantánea**. Se requiere un tiempo determinado por los elementos del circuito para lograr que v_C alcance la tensión final V_B .

La tensión v_C se puede determinar, para este caso, por la ecuación siguiente:

$$v_C = V_B (1 - e^{-t/\tau}) \quad (1.53)$$

Donde τ es la *constante de tiempo* del circuito y está determinada por:



$$\tau = RC \quad [s] \quad (1.54)$$

Donde C es la *capacitancia* del capacitor, medida en *faradios* (F), y R es la resistencia inserta en el circuito de la figura 1.31, medida en *ohms* (Ω).

Ahora profundicemos el análisis de la ecuación (1.53), ya que se utilizará en numerosas ocasiones. Después de tiempo $t = \tau$, la tensión v_C asciende al 63% de su valor final, aproximadamente, tal como se observa en la gráfica de la figura 1.35. Del mismo modo, podría demostrarse que cuando $t = \tau$, la corriente i_C cae al 37% de su valor máximo $i_C = V_B/R$, que se da para $t = 0$.

Aquí también es válido el concepto visto en inductancias por lo que, para la mayoría de las aplicaciones prácticas, el tiempo o periodo necesario para que la tensión v_C alcance su valor máximo continuo es aproximadamente igual a 5τ . También en este tiempo, la corriente i_C caerá a cero.

Dejamos al alumno la tarea de demostrar como se obtiene, a partir de la ecuación (1.53), la siguiente ecuación de i_C :

$$i_C = \frac{V_B}{R} e^{-t/\tau} \quad (1.55)$$

Nótese en la ecuación (1.53) que el valor final es V_B , el cual es independiente del capacitor. De hecho, cuando la tensión alcanza su valor final, la corriente a través de C es cero. El capacitor, por lo tanto y a partir de ese momento, puede ser reemplazado por un *circuito abierto*; esto es válido cuando V_B es una fuente de cc. En los sistemas electrónicos, esta característica puede usarse para bloquear o aislar la corriente de cc, proveniente de otras partes del circuito.

En la figura 1.36 se muestra una gráfica de la ecuación (1.53).

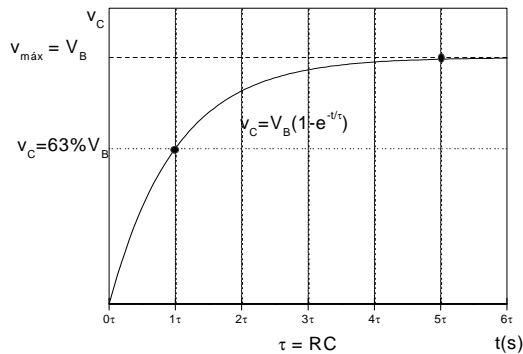


Figura 1.36 Gráfica de la ecuación (1.53)



1.9 Teorema de Superposición

Para la resolución de circuitos con dos o más fuentes de tensión o de corriente es útil emplear otros métodos distintos de los utilizados hasta el momento. Uno de ellos es el *Teorema de Superposición*, que, en general, es el más simple de describir y de utilizar.

El *Teorema de Superposición* se puede establecer como sigue:

La respuesta de un circuito debida a fuentes múltiples, se puede calcular sumando los efectos de cada fuente considerada por separado, es decir, con todas las otras fuentes “desactivadas”.

Por “desactivado” se entiende que las *fuentes de corriente* se reemplazan por *circuitos abiertos* y las *fuentes de tensión* se reemplazan por *cortocircuitos*.

Cualquier *resistencia interna*, asociada con cualquier tipo de fuente, debe *permanecer en el circuito* cuando se retiren los efectos de dicha fuente.

Otra manera de plantearlo es:

La corriente que circula a través de cualquier elemento de un circuito de cc, es la suma algebraica de las corrientes que circulan por dicho elemento, debidas a cada fuente de manera independiente.

Esto mismo se replantea, sin cambios, y es válido para la tensión sobre un elemento de un circuito de cc.

1.9.1 Limitaciones del Teorema de Superposición

La superposición es válida debido a que las Leyes de Kirchhoff y la Ley de Ohm son lineales. En todas las ecuaciones de las Leyes de Kirchhoff las tensiones y las corrientes aparecen a la primera potencia; no hay raíces cuadradas o funciones exponenciales o de otro tipo.

La superposición no es válida para cálculos de potencia, ya que estos involucran productos de tensiones y corrientes, o elevan al cuadrado una variable, como en el caso de $I^2 R$. De esta manera, no se obtendrá la potencia total correcta si se suman por separado las potencias debidas a cada fuente.

La superposición tampoco dará resultados correctos para circuitos que contengan dispositivos electrónicos *no lineales*, como diodos o transistores.

1.10 Teorema de Redes Eléctricas

1.10.1 Teorema de Thevenin

Este teorema y su concepto de *circuito equivalente* fue propuesto por primera vez en la década de 1880 por el telegrafista francés M. L. Thévenin y establece que:

Una red de cc lineal de dos terminales, puede ser sustituida por un circuito equivalente constituido por una fuente de tensión y un resistor en serie, como se muestra en la figura 1.37.

La resistencia y la fuente de tensión equivalente se conocen como resistencia equivalente de Thévenin (R_{th}) y tensión equivalente de Thévenin (V_{th}).

La resistencia de Thévenin R_{th} es la resistencia entre los terminales de salida de la red, con todas las fuentes (de tensión y de corriente) desactivadas. La tensión de Thévenin V_{th} es la tensión a circuito abierto entre los terminales de salida, con todas las fuentes de tensión presentes, como en el circuito original.

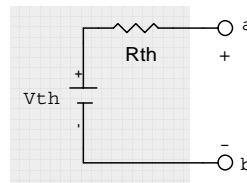


Figura 1.37 Circuito equivalente de Thévenin.

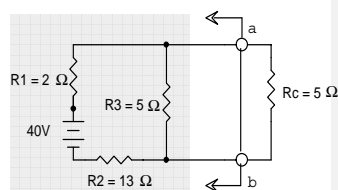


Figura 1.38 Ejemplo de aplicación del Teorema de Thévenin.

El circuito equivalente de Thévenin conduce a una de las ideas más útiles de la ingeniería eléctrica que es la idea de "impedancia de salida" de un circuito. La *impedancia de salida* de un circuito dado, por ejemplo el de la figura 1.38, es precisamente R_{th} y es la resistencia que "ve" la carga R_C hacia el interior del circuito.

De la misma manera, la resistencia R_C es la "impedancia de entrada" que el circuito "ve" hacia los bornes de salida. Esto se indica en la figura 1.39.

Generalizando, podemos expresar esta situación según la figura 1.40, en donde hemos reemplazado al circuito a la izquierda de los bornes de salida, como un circuito genérico "A" y al circuito a la derecha de los bornes de salida (en este caso particular, solo la resistencia R_C), como un circuito genérico "B".

De aquí puede extraerse una regla práctica, sumamente útil para el diseño de circuitos: Cuando un circuito "A" alimenta o controla a un circuito "B", es necesario que el circuito "B" no "cargue" al circuito "A".

Que *no cargue* significa que al conectar el circuito "B" al "A" no cause una atenuación de la señal que entrega este último (o que la atenuación sea insignificante). Para que esto se cumpla, la resistencia de salida del circuito "A" R_{outA} debe ser menor o igual a 1/10 de la resistencia de entrada del circuito "B" R_{inB} . Con esta consideración tendremos una atenuación menor al 10%. Esta regla puede expresarse según lo siguiente:

$$R_{outA} \leq 1/10 R_{inB} \quad \text{o} \quad R_{inB} \geq 10 R_{outA}$$

Quando veamos los circuitos de corriente alterna, se generalizarán ambas características para tener el concepto de impedancia de entrada Z_{in} e impedancia de salida Z_{out} .

Recordemos que el circuito equivalente reemplaza al circuito original, dentro de la zona gris, solamente para efectos *externos* a la misma. Una vez reemplazado no pueden realizarse un análisis interno, por ejemplo saber la corriente que circula por la resistencia R_1 (Fig.1.39), a partir del circuito equivalente.

Veamos el ejemplo dado en la figura 1.38, en el cual el circuito a la izquierda de los puntos *a* y *b* (zona gris) debe ser reemplazada por un circuito equivalente de Thévenin.

Para determinar R_{th} , se reducen todas las fuentes a cero, reemplazándolas con un cortocircuito equivalente, con lo que se obtiene la red mostrada en la figura 1.41a:

$$R_{th} = R_3 \parallel (R_1 + R_2) = \frac{(5\Omega)(2\Omega + 13\Omega)}{5\Omega + (2\Omega + 13\Omega)} = 3.75\Omega$$

Para determinar V_{th} , se vuelven a colocar las fuentes y se determina la tensión de circuito abierto, como se muestra en la figura 1.41b:

$$V_{th} = V_{R_3} = \frac{V_B R_3}{R_T} = \frac{(40V)(5\Omega)}{20\Omega} = \frac{200V}{20} = 10V$$

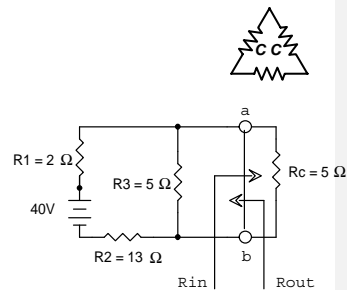


Figura 1.39 Resistencia de entrada R_{in} y resistencia de salida R_{out}

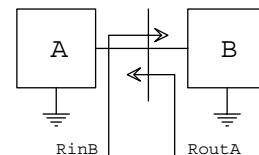


Figura 1.40 Generalización: Circuito "A" alimenta al circuito "B"

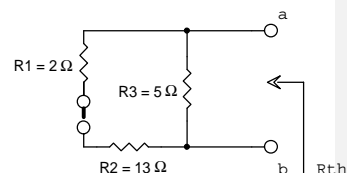


Figura 1.41a Determinación de R_{th}

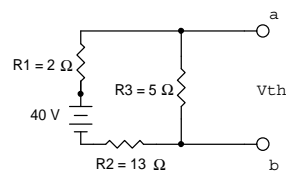


Figura 1.41b Determinación de V_{th}

El circuito de Thévenin queda como indica la figura 1.41c, con el resistor de carga R_L colocado entre los terminales a y b .

Dejamos al estudiante la tarea de verificar que, desde el punto de vista de la carga R_C , en la resolución de los dos circuitos de las figuras 1.38 y 1.41c se llega al mismo resultado, en cuanto a la tensión V_C y la corriente I_C .

1.10.2 Teorema de Norton

Un ingeniero estadounidense llamado E.L. Norton (1898-1983) propuso un circuito equivalente alternativo, a través del *Teorema de Norton*, el que establece que:

Una red de cc lineal de dos terminales, puede ser sustituida por un circuito equivalente constituido por una fuente de corriente y un resistor en paralelo, como se muestra en la figura 1.42

La resistencia de Norton R_{N_0} o impedancia de salida, es la misma que la del circuito equivalente de Thévenin, que es la que presenta el circuito visto desde la carga, con todas las fuentes desactivadas. La corriente de Norton I_N tiene una magnitud idéntica a la que fluiría en un cortocircuito conectado a los terminales de salida; o sea que es la corriente de cortocircuito.

En la práctica, no siempre es factible o prudente medir la corriente de cortocircuito porque, en algunos casos, existen protecciones internas que limitan dicha corriente, cuando se cortocircuita la salida y, en otros casos, los valores de corriente involucrados son demasiado elevados, pudiendo dañar el propio circuito bajo prueba.

1.10.3 Relación entre los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton

Si dos circuitos son equivalentes a un mismo circuito, deben ser equivalentes entre sí. De este modo, si en el circuito de Norton dado en la figura 1.42 se mide la tensión a los bornes abiertos a y b , esta será V_{th} . En general es cierto que:

$$V_{th} = I_N R_N = I_N R_{th} \quad (1.56)$$

La ecuación (1.56) es útil en el trabajo teórico, pero también se puede aplicar en el laboratorio para encontrar la impedancia de salida de un circuito. En la práctica, no siempre es posible entrar en un circuito electrónico y desactivar todas las fuentes pero, en general y con las salvedades hechas en el punto 1.10.2, es posible medir la tensión de salida a circuito abierto y la corriente de salida que fluye cuando se cortocircuitan dichos terminales de salida. A partir de esas mediciones es posible calcular la impedancia de salida a través de:

$$R_N = R_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} \quad (1.57)$$

Existen otros métodos indirectos para medir la impedancia de salida, los que serán abordados en los trabajos prácticos de laboratorio.

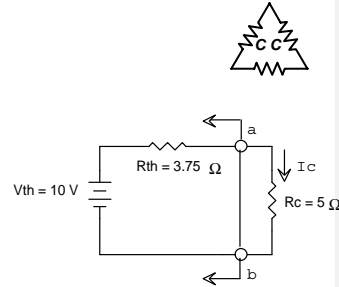


Figura 1.41c Circuito equivalente

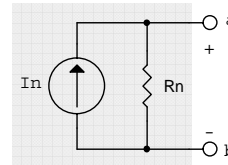


Figura 1.42 Circuito equivalente de Norton.



1.10.4 Teorema de la Máxima Transferencia de Potencia

El teorema de la máxima transferencia de potencia se utiliza para asegurar que una carga recibe la máxima potencia de la fuente de alimentación. Dicho teorema establece que **una carga recibe la máxima potencia cuando su resistencia es igual a la resistencia de Thévenin vista por la carga**. Para valores mayores o menores, la potencia transferida disminuye. En el caso del ejemplo visto del Teorema de Thévenin, la R_C deberá ser igual a 3.75Ω .

En general, para la máxima transferencia de potencia hacia una carga se tiene:

$$\boxed{R_C = R_{th}} \quad (1.58)$$

Empleando la Ley de Ohm se tiene:

$$I_C = \frac{V_{th}}{R_C + R_{th}} = \frac{V_{th}}{2 R_{th}}$$

y

$$P_C = I_C^2 R_C = \left(\frac{V_{th}}{2 R_{th}} \right)^2 R_{th}$$

reemplazando

$$\boxed{P_{C\text{ máx}} = \frac{V_{th}^2}{4 R_{th}}} \quad (1.59)$$

1.11 Medición de Tensión, Corriente y Resistencia. Errores cometidos.

Primeramente observemos la figura 1.43, donde se ilustra como es un multímetro digital (DMM: digital multimeter) y como puede ser usado para medir tensiones y corrientes de cc y también resistencias. En cada esquema, la lectura sobre el visor (display) del multímetro es V_m , I_m o R_m , según corresponda, y la resistencia interna del DMM es R_{DMM} .

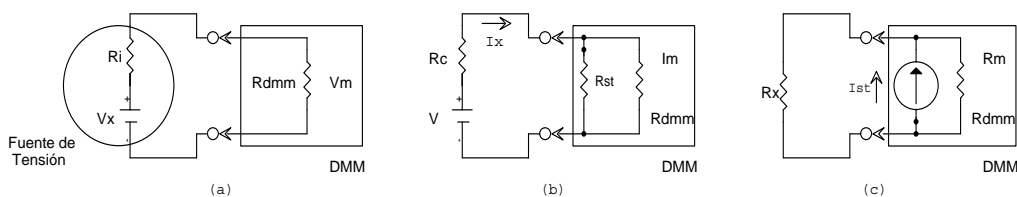


Figura 1.43 Usos de un multímetro digital.

- (a) Medición de la salida V_X de una fuente de voltaje
- (b) Medición de una corriente I_X a través de un resistor de carga R_C
- (c) Medición de resistencia R_X de un elemento de circuito desconocido



La configuración mostrada en la figura 1.43a es usada para determinar una tensión desconocida V_X de una fuente de tensión, que tiene una resistencia interna R_i . Luego veremos a que se debe el error introducido, que hace que V_M no sea exactamente igual al verdadero valor de V_X . Si se desean medir otras tensiones, fuera de los rangos del DMM, puede colocarse un divisor de tensión a los bornes, como los que se estudiaron en la sección 1.7.1.2.

La configuración mostrada en la figura 1.43b es utilizada para medir una corriente desconocida I_X que circula a través de un resistor de carga R_C . Lo que en realidad mide el DMM es la tensión a los bornes del resistor R_{st} , que es proporcional a la corriente I_X . El resistor R_{st} está dentro del DMM y es un pequeño resistor de precisión, que usualmente está entre los $0,1\Omega$ o menos a los varios cientos de ohms; con un adecuado arreglo de circuitos y valores de R_{st} , lo que muestra el display del DMM es directamente la corriente medida. Si tenemos, por ejemplo, que $R_{st} = 1\text{ K}\Omega$ y la tensión leída en el DMM es $V_M = 1,5\text{V}$, entonces la corriente medida es de $1,5\text{A}$, y eso será lo que nos muestre el multímetro.

La configuración mostrada en la figura 1.43c es empleada para medir una resistencia desconocida R_X . El voltímetro posee una fuente de cc que produce una corriente constante I_{st} , la cual se hace circular a través de R_X . El DMM indica la caída de tensión a través de la resistencia desconocida, cuando la corriente I_{st} circula por ella. Por ejemplo, si $I_{st} = 0,01\text{A}$ y la tensión medida por el voltímetro es $V_M = 0,945\text{V}$, estaremos en presencia de una resistencia medida de $0,945\text{V}/0,01\text{A} = 94,5\Omega$. Aquí también, el voltímetro nos indica directamente el valor de la resistencia, debido a la configuración del propio DMM.

Vimos que el instrumento analizado mide tensiones, corrientes y resistencias. Algunos, adicionalmente, pueden medir capacidades y determinados parámetros de transistores (que se verán luego, en el desarrollo del curso de electrónica).

Tal cual analizamos lo que sucedía en un divisor de tensión, se puede determinar que, para el caso de la figura 1.43a, el efecto de medir la tensión V_X , hace que el DMM introduzca una carga en el circuito, que es precisamente R_{DMM} , provocando un error llamado *error de carga*. Esta situación, no es particular de los multímetros, sino que es una limitación fundamental de cualquier medición física. Esto es, **el proceso de medición, inevitablemente altera el sistema en estudio haciendo que la cantidad actualmente medida difiera de su verdadero valor, previo a la medición**. Este tipo de error nunca se puede eliminar completamente, pero se puede reducir a proporciones despreciables.

La magnitud del error de carga, en las mediciones de tensión, depende de la relación entre la resistencia interna del instrumento y la resistencia del circuito bajo medición. Este error relativo E_r , asociado con la medición de tensión V_M en la figura 1.43a, está dado por:

$$E_r = \frac{V_M - V_X}{V_X} \times 100\% \quad (1.60)$$

Donde V_X es la tensión real de la fuente. Si aplicamos la ecuación (1.26) del divisor de tensión, tendremos:

$$V_M = V_X \left(\frac{R_{DMM}}{R_{DMM} + R_i} \right)$$



Sustituyendo en la ecuación (1.60) nos queda:

$$E_r = -\frac{R_i}{R_{DMM} + R_i} \times 100\% \quad (1.61)$$

Aquí vemos que el error relativo se reduce cuando la resistencia R_{DMM} se hace más grande en relación a la resistencia R_i . La tabla 1.2 muestra este efecto, claramente:

Tabla 1.2

Resistencia Interna del Instrumento R_{DMM}, Ω	Resistencia de la fuente de tensión R_i, Ω	R_{DMM} / R_i	Error Relativo %
10	20	0,50	- 67
50	20	2,5	- 29
500	20	25	-3,8
$1,0 \times 10^3$	20	50	-2,0
$1,0 \times 10^4$	20	500	-0,20

Los multímetros digitales (DMM) tienen una resistencia interna usualmente de $10 \text{ M}\Omega$.

1.12 EJEMPLOS

Aquí se incluyen una serie de ejemplos, como corolario del presente capítulo, para completar la comprensión de lo desarrollado hasta aquí.

EJEMPLO 1.12.1 Determine la corriente en amperes a través del alambre de la figura E1.12.1 si $18,84 \times 10^{18}$ electrones pasan a través del área de la sección transversal en una dirección en 0,02 minutos.

Solución:

$$N^{\circ} \text{ de coulombs} = \frac{18,84 \times 10^{18} \text{ electrones}}{6,28 \times 10^{18} \text{ electrones / coulombs}} = 3 \text{ C}$$

Según la ecuación (1.6), $t \text{ (s)} = 0,02 \text{ min} \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) = 1,2 \text{ s}$

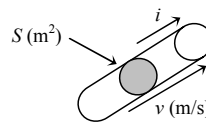


Figura E1.12.1 Flujo de la carga en un conductor.



$$I = \frac{Q}{t} = \frac{3C}{1,2s} = 2,5A$$

EJEMPLO 1.12.2 ¿Cuánto tiempo necesitará una carga de 120 C para pasar a través de un conductor si la corriente es de 2 A?

Solución: Según la ecuación (1.6)

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{120C}{2A} = 60s$$

EJEMPLO 1.12.3 Determine la energía disipada por una batería de 12 V, al desplazar 20×10^{18} electrones entre sus terminales.

Solución: Según la ecuación (1.9)

$$N^{\circ} \text{ de coulombs} = \frac{20 \times 10^{18} \text{ electrones}}{6,28 \times 10^{18} \text{ electrones}} = 3,185C$$

Y

$$W = QV = (3,185C)(12V) = 38,22J$$

EJEMPLO 1.12.4 Un voluminoso rollo de alambre de cobre está tirado en el suelo de una fábrica y se debe obtener su longitud. Para ello se tiene como dato la resistencia del alambre, de $0,1\Omega$ medida por un óhmetro entre sus extremos, la resistividad ρ específica del alambre, de $1,7 \Omega m$, y el diámetro del alambre de aproximadamente 3,2 mm, medido con un calibre.

Solución: Según la ecuación (1.11) se tiene

$$R = \rho \frac{l}{S} \Rightarrow l = \frac{RS}{\rho} = \frac{(0,1\Omega) \left(\pi \left(\frac{0,0032m}{2} \right)^2 \right)}{1,7 \times 10^{-8} \Omega m} = 47,31m$$

EJEMPLO 1.12.5 Si la resistencia de un conductor de cobre es de $0,6 \Omega$ a $20^{\circ}C$, ¿a que temperatura será de 1Ω ?, considerando que $\alpha = 0,00393$ para $20^{\circ}C$

Solución: Según la ecuación (1.12) se tiene



$$R_2 = R_1 [1 + \alpha(t_2 - t_1)] \Rightarrow t_2 = \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - 1}{\alpha} + t_1 = \frac{\left(\frac{1\Omega}{0,6\Omega}\right) - 1}{0,00393} + 20^\circ C$$

$$t_2 = 189,635^\circ C$$

EJEMPLO 1.12.6 Determine el intervalo de valores garantizado por el fabricante, para el resistor de la figura E1.12.6

Solución:

Naranja = 3 Naranja = 3 Rojo = 100 (10^2) Oro = $\pm 5\%$

Entonces: $33 \times 10^2 \pm 5\% = 3.300 \pm 165 = 3.135 \Omega \rightarrow 3.465 \Omega$

Si el valor medido del resistor fuera 3.220Ω en lugar de los 3.300Ω marcados en el cuerpo del mismo, aún así se cumpliría con las normas del fabricante.

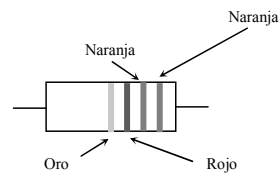


Figura E1.12.6 Ejemplo de Código de colores en Re-

EJEMPLO 1.12.6 Determine la codificación de colores para un resistor de $120 K\Omega$, con un factor de tolerancia de 10%

Solución:

$120 K\Omega = 120.000 \Omega$ 10%

1º Dígito = marrón (1) 4º Dígito (tolerancia) = plata

2º Dígito = rojo (2) 3º Dígito (multiplicador) = amarillo (4)

EJEMPLO 1.12.7 Determine la caída de tensión a través de un resistor de $4,7 K\Omega$, si la corriente que circula por él es de $7 mA$

Solución:

$$V = IR = (7 \times 10^{-3} A)(4,7 \times 10^3 \Omega) = 32,9 \times 10^0 V = 32,9 V$$

EJEMPLO 1.12.8 Determine el consumo de corriente de una estufa eléctrica que tiene una resistencia interna de 39Ω , si la tensión aplicada es de $220V$.

Solución:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220V}{39\Omega} = 5,64 A$$



EJEMPLO 1.12.9 Determine el valor de la resistencia interna de un despertador que consume 10 mA a 220V.

Solución:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{220V}{10mA} = \frac{220V}{10 \times 10^{-3} A} = 22 \times 10^3 \Omega = 22 K\Omega$$

EJEMPLO 1.12.10 Determine la tensión sobre el resistor de la figura E1.12.10, cuando el interruptor está abierto y cuando está cerrado.

Solución: Cuando el interruptor está abierto, no existe circulación de corriente por el circuito y, por ende, por el resistor. Por la Ley de Ohm se deduce que la tensión $V=IR$ será igual a cero.

Cuando el interruptor está cerrado, toda la tensión de la batería está directamente aplicada al resistor, ya que no hay caída de tensión en el interruptor. Por ende, la tensión sobre el resistor será igual a 12 V.

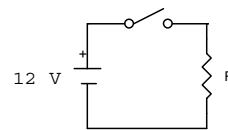


Figura E1.12.10 Tensión sobre el resistor

EJEMPLO 1.12.11 Determine la tensión resultante, para la combinación de baterías dada en la figura E.1.12.11.

Solución: Tomemos primero las dos baterías de 1V que están en paralelo. A efectos de la tensión resultante a los bornes de las mismas, la tensión será también igual a 1V (solo existirá una mayor capacidad de entregar corriente), por lo que pueden ser reemplazadas por una sola batería de 1V. Luego, nos quedan tres baterías en serie, de 0,5V, 1V y 2V, por lo que la tensión resultante entre los bornes a y b será de 3,5V.

En ecuación será:

$$V_{ab} = (0,5V) + (1V \parallel 1V) + (2V) = (0,5V) + (1V) + (2V) = 3,5V$$

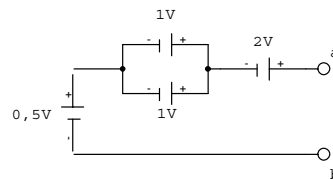


Figura E1.12.11 Combinación de baterías

EJEMPLO 1.12.12 Determine el consumo de corriente de una resistencia de calefacción de 180 W cuando se conecta a una tensión continua de 220 V.

Solución:

$$P = VI \Rightarrow I = \frac{P}{V} = \frac{180W}{220V} = 0,82 A$$

EJEMPLO 1.12.13 Calcular las variables detalladas a continuación, a partir del circuito de la figura E.1.12.13.

- R_T
- I
- V_3
- P_4
- V_3 mediante la regla divisora de voltaje

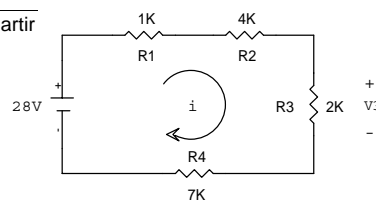


Figura E1.12.13



Solución:

a. $R_T = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1\text{ K}\Omega + 4\text{ K}\Omega + 2\text{ K}\Omega + 7\text{ K}\Omega = 14\text{ K}\Omega$

b. $I = \frac{V_B}{R_T} = \frac{28\text{ V}}{14\text{ K}\Omega} = 2\text{ mA}$

c. $V_3 = I R_3 = (2\text{ mA})(2\text{ K}\Omega) = 4\text{ V}$

d. $P_4 = I^2 R_4 = (2\text{ mA})^2 (7\text{ K}\Omega) = (2 \times 10^{-3}\text{ A})^2 (7 \times 10^3\text{ }\Omega) = 28 \times 10^{-3}\text{ W} = 28\text{ mW}$

e. $V_3 = \frac{R_3 V_B}{R_T} = \frac{(2\text{ K}\Omega)(28\text{ V})}{14\text{ K}\Omega} = 4\text{ V}$ como en el punto c.

EJEMPLO 1.12.14 Determine las variables detalladas a continuación, a partir del circuito de la figura E.1.12.14.

- a. R_T
- b. I
- c. I_2
- d. P_3

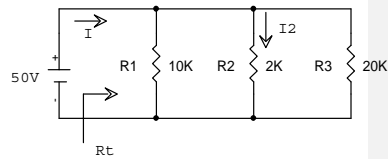


Figura E1.12.14

Solución:

a. $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10\text{ K}\Omega} + \frac{1}{2\text{ K}\Omega} + \frac{1}{20\text{ K}\Omega} = 0,1 \times 10^{-3}\text{ S} + 0,5 \times 10^{-3}\text{ S} + 0,05 \times 10^{-3}\text{ S} = 0,65 \times 10^{-3}\text{ S}$

$$R_T = \frac{1}{0,65 \times 10^{-3}\text{ S}} \cong 1,54\text{ K}\Omega$$

Nótese que la resistencia total R_T es menor que la menor resistencia presente en el paralelo ($2\text{ K}\Omega$).

b. $I = \frac{V_B}{R_T} = \frac{50\text{ V}}{1,54\text{ K}\Omega} = 32,47\text{ mA}$

c. $I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_B}{R_2} = \frac{50\text{ V}}{2\text{ K}\Omega} = 25\text{ mA}$

d. $P_3 = \frac{V_3^2}{R_3} = \frac{V_B^2}{R_3} = \frac{(50\text{ V})^2}{20\text{ K}\Omega} = 125\text{ mW}$



EJEMPLO 1.12.15

- Determine la corriente I_1 en la figura E.1.12.15 con la Regla del Divisor de Corriente;
- Determine I_2 con la Ley de Corrientes de Kirchhoff.

Solución:

$$a. \quad I_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2} = \frac{(99 \text{ K}\Omega)(12 \text{ mA})}{1 \text{ K}\Omega + 99 \text{ K}\Omega} = \frac{(99 \text{ K}\Omega)(12 \text{ mA})}{100 \text{ K}\Omega} = 11,88 \text{ mA}$$

- En el punto a tenemos

$$\sum I_{\text{entrada}} = \sum I_{\text{salida}} \Rightarrow I = I_1 + I_2$$

Por lo tanto:

$$I_2 = I - I_1 = 12 \text{ mA} - 11,88 \text{ mA} = 0,12 \text{ mA}$$

Obsérvese que la mayor corriente circula por la rama de menor resistencia. De hecho, la corriente se divide según la razón de los niveles de resistencia. Es decir, $99 \text{ K}\Omega : 1 \text{ K}\Omega$ y $11,88 \text{ mA} : 0,12 \text{ mA} = 99 : 1$ también.

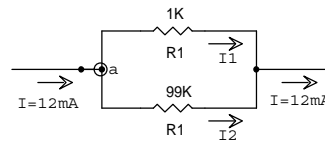


Figura E1.12.15

EJEMPLO 1.12.16 Para el circuito serie-paralelo de la figura E.1.12.16a:

- Calcule R_T ;
- Encuentre I_T ;
- Determine I_1 e I_2 ;
- Calcule V_1 ;
- Calcule la potencia entregada al resistor de $8 \text{ K}\Omega$.

Solución:

- Combinando los resistores de $3 \text{ K}\Omega$ y $6 \text{ K}\Omega$ en paralelo,

$$3 \text{ K}\Omega \parallel 6 \text{ K}\Omega = \frac{(3 \text{ K}\Omega)(6 \text{ K}\Omega)}{3 \text{ K}\Omega + 6 \text{ K}\Omega} = 2 \text{ K}\Omega$$

El resistor equivalente de $2 \text{ K}\Omega$ está en serie con el resistor de $10 \text{ K}\Omega$ y

$$R'_T = 10 \text{ K}\Omega + 2 \text{ K}\Omega = 12 \text{ K}\Omega$$

Los resistores de $4 \text{ K}\Omega$ y de $8 \text{ K}\Omega$ están en serie, por tanto

$$R''_T = 4 \text{ K}\Omega + 8 \text{ K}\Omega = 12 \text{ K}\Omega$$

La red se puede volver a dibujar, según la figura E1.12.16b

$$R_T = R'_T \parallel R''_T = 12 \text{ K}\Omega \parallel 12 \text{ K}\Omega = \frac{12 \text{ K}\Omega}{2} = 6 \text{ K}\Omega$$

$$b. \quad I_T = I = \frac{V_B}{R_T} = \frac{24 \text{ V}}{6 \text{ K}\Omega} = 4 \times 10^{-3} \text{ A} = 4 \text{ mA}$$

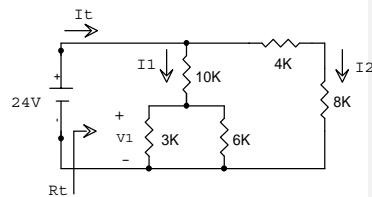


Figura E1.12.16a

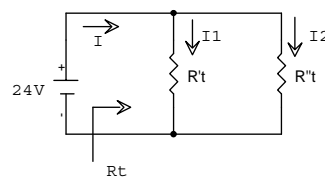


Figura E1.12.16b



$$c. \quad I_1 = \frac{V_B}{R_T} = \frac{24V}{12K\Omega} = 2 \times 10^{-3} A = 2mA$$

$$e. \quad I_2 = \frac{V_B}{R_T} = \frac{24V}{12K\Omega} = 2 \times 10^{-3} A = 2mA$$

Se observa que al ser las resistencias en paralelo iguales (figura E1.12.16b), las corrientes también deben ser iguales.

$$d. \quad V_1 = I_1 (3K\Omega \parallel 6K\Omega) = I_1 (2K\Omega) = (2 \times 10^{-3} A)(2 \times 10^3 \Omega) = 4V$$

$$e. \quad P_{8K\Omega} = I_2^2 (8K\Omega) = (2 \times 10^{-3} A)^2 (8 \times 10^3 \Omega) = 32 \times 10^{-3} W = 32mW$$

EJEMPLO 1.12.17 Para el circuito indicado en la figura E1.12.17 determine el valor de la corriente I_L , cuando $t = \tau$ y cuando $t = 5\tau$, luego que se cierra el interruptor.

Solución: La inductancia total es

$$L_T = L_1 + L_2 = 15mH + 5mH = 20mH$$

La resistencia total es

$$R_T = R_1 \parallel R_2 = \frac{(4K\Omega)(8K\Omega)}{4K\Omega + 8K\Omega} = \frac{32K\Omega}{12} = 2,66K\Omega$$

Por lo tanto

$$\tau = \frac{L_T}{R_T} = \frac{20mH}{2,66K\Omega} = \frac{20 \times 10^{-3} H}{2,66 \times 10^3 \Omega} = 7,5\mu S$$

Resolviendo

$$I_L |_{t=\tau} = \frac{V_B}{R_T} (1 - e^{-1}) = \frac{12V}{2,66K\Omega} (1 - e^{-1}) = \frac{12V}{2,66 \times 10^3 \Omega} (0,632) = 2,85mA$$

$$I_L |_{t=5\tau} = \frac{V_B}{R_T} (1 - e^{-5}) = \frac{12V}{2,66K\Omega} (1 - e^{-5}) = \frac{12V}{2,66 \times 10^3 \Omega} (0,993) \cong \frac{12V}{2,66 \times 10^3 \Omega} = 4,5mA$$

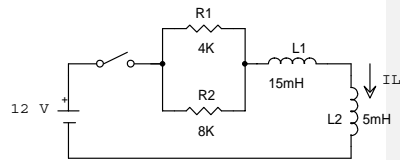


Figura E1.12.17

EJEMPLO 1.12.18 Para el circuito indicado en la figura E1.12.18a determine la expresión matemática para v_C , al cerrarse el interruptor en el instante $t = 0$.

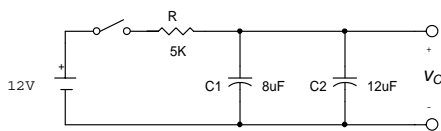


Figura E.1.12.18a



Solución: La capacitancia total de los capacitores en paralelo está dada por

$$C = C_1 + C_2 = 8 \mu F + 12 \mu F = 20 \mu F$$

Por lo tanto

$$\tau = RC = (5 K\Omega)(20 \mu F) = (5 \times 10^3 K\Omega)(20 \times 10^{-6} \mu F) = 100 \times 10^{-3} s = 100 ms$$

Remplazando en la ecuación correspondiente

$$v_C = V_B \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 12 V \left(1 - e^{-t/100 \times 10^{-3}}\right)$$

Esto puede verse en la figura E.1.11.18b

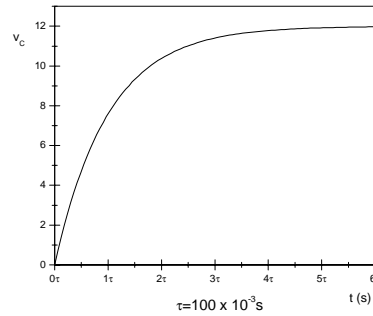


Figura E.1.12.18b

EJEMPLO 1.12.19 Determine la corriente que circula por el resistor de 6Ω de la red ilustrada en la figura E.1.12.19a, por medio del Teorema de Superposición.

Solución:

Primero se toman en cuenta los efectos de la fuente de tensión y se retira la fuente de corriente, es decir, se desactiva, como muestra la figura E.1.12.19b. La corriente será:

$$I' = \frac{V_B}{R_1 + R_2} = \frac{6V}{4\Omega + 6\Omega} = 0,6 A$$

El efecto de la fuente de corriente se examina desactivando la fuente de tensión, como se muestra en la figura E.1.12.19c. Al aplicar la regla del divisor de corriente, se tiene:

$$I'' = \frac{R_1(I)}{R_1 + R_2} = \frac{(4\Omega)(3A)}{4\Omega + 6\Omega} = \frac{12V}{10\Omega} = 1,2 A$$

Se debe tener en cuenta que I'' es de dirección opuesta a I' y por lo tanto:

$$I_2 = I'' - I' = 1,2 A - 0,6 A = 0,6 A$$

Con la dirección de la corriente mayor, I'' .

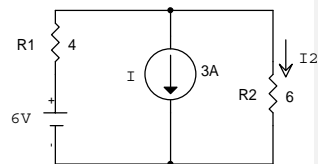


Figura E.1.12.19a

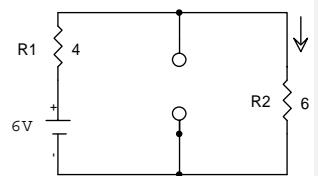


Figura E.1.12.19b

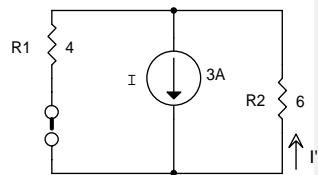


Figura E.1.12.19c

EJEMPLO 1.12.20 Determine los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton para el circuito de la figura E.1.12.20a.

Solución:

Para determinar la Resistencia de Thévenin debemos desactivar las fuentes de tensión presentes en el circuito, reemplazándolas por cortocircuitos, tal como se indica en la figura E.1.12.20b, por ello:

$$R_{th} = \{[R_1 + R_5] \parallel [R_2 + (R_3 \parallel R_4)]\} + R_6$$

Resolviendo por parte tenemos:

$$R_1 + R_5 = 2\text{ K}\Omega + 4\text{ K}\Omega = 6\text{ K}\Omega$$

$$R_2 + (R_3 \parallel R_4) = 1\text{ K}\Omega + \frac{(10\text{ K}\Omega)(10\text{ K}\Omega)}{10\text{ K}\Omega + 10\text{ K}\Omega} = 1\text{ K}\Omega + 5\text{ K}\Omega = 6\text{ K}\Omega$$

$$R_{th} = \frac{(6\text{ K}\Omega)(6\text{ K}\Omega)}{6\text{ K}\Omega + 6\text{ K}\Omega} + 1\text{ K}\Omega = 4\text{ K}\Omega$$

Para determinar la Tensión de Thévenin, debemos calcular la tensión a circuito abierto, a los bornes de la resistencia de carga R_C . Observando la figura E.1.12.20a, tenemos:

$$V_{th} = V_{ab} = V_{ac}$$

Donde V_{ab} es la tensión en la rama $a-b$ y V_{ac} es la tensión en la rama $a-c$. Como el potencial en b es el mismo que en c , ambas tensiones son iguales. Calculando:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2 + (R_3 \parallel R_4) + R_5} = \frac{12\text{ V} - 8\text{ V}}{2\text{ K}\Omega + 1\text{ K}\Omega + 5\text{ K}\Omega + 4\text{ K}\Omega} = \frac{4\text{ V}}{12\text{ K}\Omega} = \frac{4\text{ V}}{12 \times 10^3 \Omega} = 0,333\text{ mA}$$

Observen que V_2 se resta de V_1 , ya que su sentido es contrario a la circulación de I que hemos tomado arbitrariamente. Como el resultado de I es positivo, el sentido adoptado para la corriente es el correcto.

Entonces:

$$V_{th} = V_1 - (I)(R_1 + R_5) = V_2 + (I)(R_2 + [R_3 \parallel R_4]) = 12\text{ V} - (0,333\text{ mA})(2\text{ K}\Omega + 4\text{ K}\Omega) = 12\text{ V} - 1,998\text{ V} \cong 10\text{ V}$$

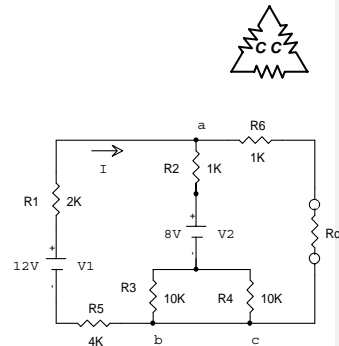


Figura E.1.12.20a

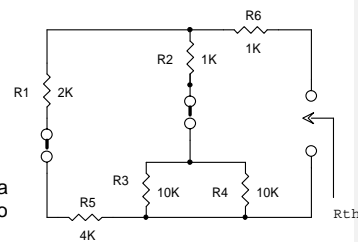


Figura E.1.12.20b

Para calcular el circuito equivalente de Norton solo hace falta calcular la corriente de Norton I_N , ya que la resistencia de Norton R_N es la misma resistencia de Thévenin R_{th} .

$$R_N = R_{th} = 4\text{ K}\Omega$$

La corriente I_N es la corriente de cortocircuito, tal como se indica en la figura E.1.12.20c. Para simplificar el análisis, usaremos el circuito equivalente de Thévenin ya calculado, para reemplazar todo el circuito existente a los bornes de la carga R_C , por lo que la ecuación para la corriente de Norton será:

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{10\text{ V}}{4\text{ K}\Omega} = 2,5\text{ mA}$$

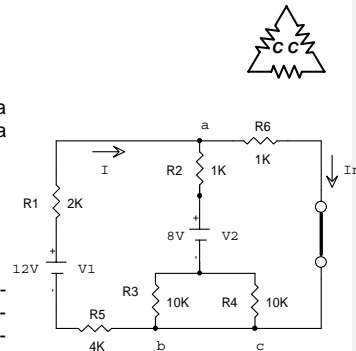


Figura E.1.12.20c

EJEMPLO 1.12.21 Para el circuito del problema anterior, indicar cual debe ser el valor de la resistencia de carga R_C para que se cumpla el teorema de la Máxima Transferencia de Potencia. Calcular, además, dicha potencia.

Solución:

Para que se cumpla el teorema de la Máxima Transferencia de Potencia, debe verificarse la siguiente condición:

$$R_C = R_{th} = 4\text{ K}\Omega$$

La potencia, según la ecuación (1.59), será:

$$P_{max} = \frac{(V_{th})^2}{4 R_{th}} = \frac{(10\text{ V})^2}{4(4\text{ K}\Omega)} = \frac{100\text{ V}^2}{16 \times 10^3 \Omega} = 6,25\text{ mW}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO, MATEMATICAS Y NATURALES

LABORATORIO DE ELECTRÓNICA, INVESTIGACIÓN Y SERVICIOS

LICENCIATURA EN FÍSICA

GUIA DE ESTUDIO PARA ELECTRONICA I

CIRCUITOS DE

CORRIENTE ALTERNA

***** 2001 *****

Ing. Héctor Gellón

Ing. Alfredo Debattista

ELECTRÓNICA I – UNSL - LEIS

CAPITULO II	2
2 Fundamentos y Circuitos de Corriente Alterna:	2
2.1 Conceptos Básicos	3
2.1.1 Formas de onda	3
2.1.2 Ciclo, Periodo y Frecuencia	4
2.1.3 Valor pico	6
2.1.4 Valor Eficaz	6
2.1.5 Valor Medio, Factor de Forma	7
2.1.6 Fase, Angulo de Fase y Diferencia de Fase	9
2.1.7 Potencia en Corriente Alterna	10
2.1.7.1 Potencia Activa. Factor de Potencia	10
2.1.7.2 Potencia Aparente. Potencia Reactiva	12
2.1.8 Escala Logarítmica. Decibel. Diagramas de Bode	13
2.1.9 Impedancia en Corriente Alterna	15
2.1.9.1 Resistencia	15
2.1.9.2 Reactancia Capacitiva	16
2.1.9.3 Reactancia Inductiva	17
2.1.9.4 Análisis en el campo de los Complejos. Fasores	18
2.1.10 Generalización de la Ley de Ohm para corriente alterna	21
2.1.11 Impedancia de un Circuito Serie	22
2.1.12 Impedancia de un Circuito Paralelo	24
2.1.13 Divisor de tensión en corriente alterna	28
2.1.14 Redes de Corriente Alterna en Serie y en Paralelo	28
2.1.15 Teorema de Redes	29
2.1.15.1 Teorema de Thévenin	29
2.1.15.2 Teorema de la Máxima Transferencia de Potencia	29
2.1.16 Transformador	30
2.1.16.1 Autotransformador	32



CAPITULO II

2 Fundamentos y Circuitos de Corriente Alterna:

Indice General

- Conceptos Básicos
 - Formas de Onda
 - Ciclo, Periodo y Frecuencia
 - Valor Pico, Valor Eficaz, Valor Medio y Factor de Forma
 - Fase, Angulo de Fase y Diferencia de Fase
 - Potencia en Corriente Alterna.
 - Potencia Activa. Factor de Potencia
 - Potencia Aparente. Potencia Reactiva
 - Escala Logarítmica. Decibel. Diagramas de Bode
- Impedancia en Corriente Alterna
 - Resistencia
 - Reactancia Capacitiva
 - Reactancia Inductiva
 - Análisis en el campo de los Complejos. Fasores
- Generalización de la Ley de Ohm para corriente alterna
- Impedancia de un Circuito Serie
- Impedancia de un Circuito Paralelo
- Divisor de Tensión en Corriente Alterna
- Redes de Corriente Alterna en Serie y en Paralelo
- Teoremas de Redes
 - Teorema de Thévenin
 - Teorema de la Máxima Transferencia de Potencia
- Transformador
 - Autotransformador



Objetivos

- ✓ Entender las variables físicas usadas para describir las señales aplicadas a los circuitos eléctricos, en el dominio de la frecuencia.
- ✓ Entender las propiedades de transformación de tensión, de corriente y de impedancia en transformadores.
- ✓ Generalizar el concepto de impedancia en corriente alterna, considerando la capacidad y la inductancia, con sus dependencias de la frecuencia.
- ✓ Comprender la generalización de la Ley de Ohm para corriente alterna.
- ✓ Entender como aplicar las leyes de tensiones y corrientes de Kirchhoff y los teoremas de redes, al análisis y resolución de los circuitos eléctricos en corriente alterna.
- ✓ Ser capaz de analizar el comportamiento de los circuitos RC, en el dominio de la frecuencia, estudiando sus aplicaciones prácticas.
- ✓ Estudiar los distintos generadores e instrumentos de medición, empleados en el análisis de los circuitos eléctricos.

2.1 Conceptos Básicos

En esta sección se repasarán los conceptos básicos de las variables físicas empleadas para describir las señales eléctricas aplicadas a los circuitos eléctricos; cuando dichas señales eléctricas varían periódicamente en el tiempo. Hasta ahora, solo habíamos trabajado con señales constantes, no variables e independientes del tiempo, tal el caso de fuentes de tensión y de corriente de cc.

Los conceptos que se verán en este capítulo serán útiles para el análisis y estudio de los circuitos de corriente alterna, llamados así precisamente porque las señales aplicadas varían o "alternan" en el tiempo.

2.1.1 Formas de onda

Una fuente de tensión que está cambiando en el tiempo, esquemáticamente se representa como se indica en la figura 2.1. Esta fuente de tensión cambiante se denomina como tensión de corriente alterna o de ca.

En la figura 2.2 se dan gráficas en el dominio del tiempo, que muestran algunos tipos comunes de tensiones de ca, con sus nombres asociados. Se observa que cada onda se alterna entre la región de arriba y la de abajo del eje cero horizontal; de allí su denominación de *forma de onda alternada*.

La primera gráfica muestra la *tensión de ca sinusoidal*, que es el tipo universalmente disponible en tomacorrientes domésticos, industriales, etc., y responde a una función *seno*. También es llamada *senoide*.

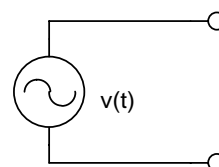


Figura 2.1 Símbolo gráfico de una señal de ca

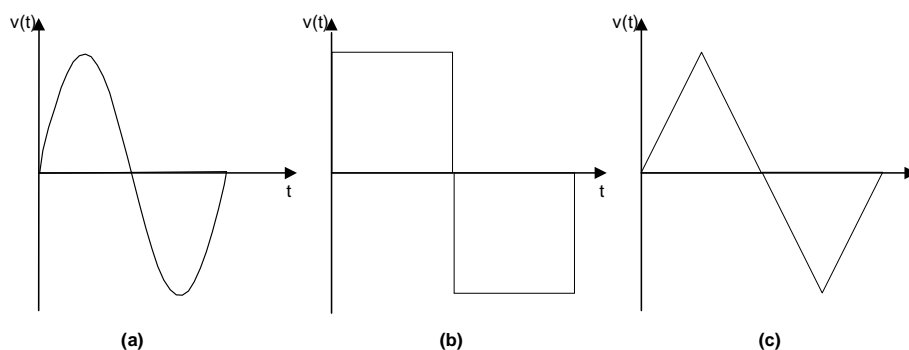


Figura 2.2 Ondas Alternas: (a) Senoidal; (b) Cuadrada; (c) Triangular.

Compare las ondas alternas con la tensión de cc mostrada en la figura 2.3, la cual es de magnitud fija y no varía con el tiempo.

Es probable que surjan dudas y preguntas sobre como analizar redes y circuitos con tensiones aplicadas que varían en el tiempo, pero ya veremos, a lo largo del presente capítulo, que el nivel de dificultad solo es ligeramente mayor que el análisis hecho con tensiones continuas. De hecho, la única dificultad adicional será matemática y no en la aplicación de los teoremas de redes ya descritos para cc.

Si volvemos a la figura 2.1 veremos que dentro del círculo que representa la fuente de tensión de ca, se halla dibujado un ciclo de la forma de onda. Esta representación es empleada para indicar el tipo de señal de la fuente de tensión y se utilizará de aquí en adelante.

La *forma de onda senoidal* es muy básica y la más común de las señales; de hecho, formas más complejas pueden ser obtenidas a través de la combinación de muchas senoides de diferentes frecuencias.

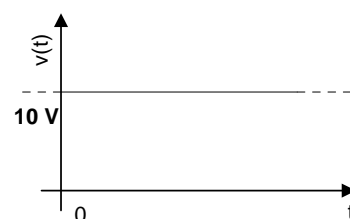


Figura 2.3 Tensión de cc

2.1.2 Ciclo, Periodo y Frecuencia

La forma de onda senoidal se obtiene proyectando la componente vertical de un vector que gire en sentido contrario a las agujas del reloj, con velocidad angular constante ω , en función del tiempo tal como se indica en la figura 2.4.

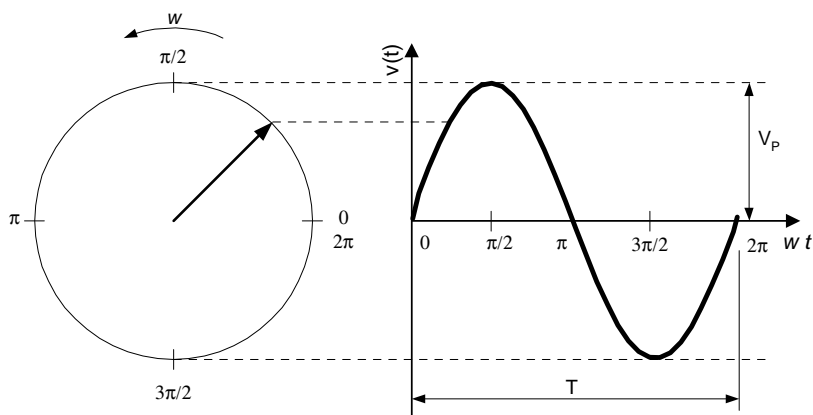


Figura 2.4 Generación de una onda sinusoidal



A una revolución completa se le da el nombre de *ciclo* y el intervalo de tiempo que se invierte en realizar o cumplir un ciclo recibe el nombre de *periodo* T . El número de ciclos por segundos [c/s] se denomina *frecuencia* f y por tanto:

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{c/s}] \quad (2.1)$$

Las unidades *ciclos por segundo* casi han sido reemplazadas, a nivel mundial, por el *hertz* (Hz); es decir que **1 Hz = 1 c/s**

El espectro de las frecuencias que se encuentran en el estudio de circuitos electrónicos es muy amplio, yendo desde el dominio infrasonoro de pocos *hertz* (Hz), pasando por el dominio de frecuencias del orden del *kilohertz* (KHz = 10^3 Hz), del *megahertz* (MHz = 10^6 Hz) y del *gigahertz* (GHz = 10^9 Hz).

Como a una revolución completa corresponden 360° o 2π radianes y se invierten en ella T segundos para que se cumpla, se tiene:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [\text{rad/s}] \quad (2.2)$$

Donde ω es la velocidad angular constante a la que gira el vector que genera la senoide. Recuerden que, de hecho, *velocidad* = *distancia* / *tiempo*. De aquí también se puede deducir que el ángulo ϕ (en radianes) recorrido a una velocidad angular ω durante un lapso de tiempo t se puede expresar como:

$$\phi = \omega t \quad (2.3)$$

Si el vector de la figura 2.4 representa una tensión y la longitud del vector es V_p , entonces el valor instantáneo $v(t)$ en cualquier instante t es:

$$v(t) = V_p \text{ sen } \omega t \quad (2.4)$$

V_p es la *amplitud* o *valor pico* de la onda sinusoidal.

La ecuación anterior también puede escribirse como:

$$v(t) = V_p \text{ sen } 2\pi f t \quad (2.5)$$

Para uso domiciliario e industrial, la tensión que se encuentra en los tomacorrientes tiene una frecuencia de 50 Hz. Esto es válido en Argentina, la mayor parte de Latinoamérica, Europa y otras áreas vecinas. En Estados Unidos la frecuencia es de 60 Hz.



2.1.3 Valor pico

Como vimos en la figura 2.4 y en la expresión (2.4) el *valor pico* de una onda es el valor de amplitud máximo que alcanza dicha onda dentro del periodo de tiempo T . Para el caso particular de la onda de tensión, ese valor es V_P , que es igual a la longitud del vector giratorio, analizado en la figura 2.4.

2.1.4 Valor Eficaz

Si analizamos una tensión o una corriente cuya forma de onda es una senoide, vemos que la misma tiene igual forma arriba y abajo del eje horizontal, por lo que podríamos suponer que no se entregaría potencia a una carga conectada a la fuente, ya que parece que el flujo neto hacia la carga, en un ciclo completo, es cero. Sin embargo, hay que tener en cuenta que en cada instante de la porción positiva o negativa de la onda, se entrega potencia instantánea y la carga la disipa. Es decir, la potencia entregada en cada instante es aditiva aun cuando la tensión o la corriente puede cambiar de dirección.

Para asociar un valor numérico a las ondas de corriente o tensión senoidales que varían con el tiempo, se estableció una relación entre una cantidad de *cc* y una cantidad de *ca* tal que cada una entregue la *misma potencia* a una carga resistiva. Lo que hay que determinar es: ¿qué corriente senoidal tendría que circular por una carga, para entregar la misma potencia que una corriente de *cc* dada?. Lo que se está comparando es el efecto Joule que originan una y otra sobre una resistencia de carga. A esto se le llamó *valor eficaz* de una onda o de RMS (Root Mean Square, raíz cuadrada de la media) y es igual al valor medio cuadrático de la onda en cuestión.

En términos prácticos, puede establecerse su valor calculando el efecto Joule de una corriente alterna sobre una resistencia de carga R , promediando las pérdidas en forma de calor para un ciclo completo; esto es:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{I_P^2 R}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt \quad (2.6)$$

La integral de $\sin^2 \omega t$ es una forma clásica que figura en tablas de integrales, con lo cual:

$$P = \frac{I_P^2 R}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_0^T = \frac{I_P^2 R T}{2T} = \frac{I_P^2 R}{2} \quad (2.7)$$

Como el efecto Joule originado en una resistencia por una corriente de *cc* es igual a $I^2 R$, el valor eficaz I_{RMS} de la intensidad de una corriente de *ca*, también llamado *intensidad eficaz* será:

$$(I_{RMS})^2 R = \frac{I_P^2 R}{2} \quad (2.8)$$

O sea:



$$I_{RMS} = \frac{I_P}{\sqrt{2}} \quad (2.9)$$

Este resultado es, obviamente, también válido para una tensión senoidal aplicada sobre una resistencia.

Los voltímetros y amperímetros capaces de medir señales de ca están calibrados casi siempre en función de los valores eficaces de una onda senoidal, con el fin de facilitar la comparación de sus lecturas con las de los instrumentos de cc. Los medidores de ca que emplean mecanismos D'Arsonval (instrumentos de imán permanente y bobina móvil, a aguja) deben tener circuitos electrónicos adicionales para medir valores eficaces, ya que su desviación es proporcional al valor medio de la onda y, obviamente, el valor medio en una senoide, a lo largo de un ciclo completo, es cero. Otros instrumentos, como el de hierro móvil y el dinamómetro, no necesitan circuitos adicionales, ya que su desviación es proporcional al valor eficaz de cualquier onda como la senoidal, la cc, la triangular y la cuadrada. Algunos instrumentos digitales poseen circuitos electrónicos avanzados, que permiten medir los valores eficaces, sin complicaciones y mostrar al usuario su valor en el display.

Se entiende, en general, que las tensiones y corrientes están caracterizadas por sus valores eficaces, a menos que se especifique otra cosa. Por ejemplo, cuando se dice que la tensión es de 220 V, 50 Hz, está implícito que la tensión eléctrica tiene un valor eficaz de 220 V y un valor máximo de $\sqrt{2}(220V) \cong 311V$. En algunos otros casos, suele hablarse de *tensión pico a pico* para indicar el valor resultante entre el valor máximo positivo y el valor máximo negativo de la onda; para el caso de una tensión eléctrica senoidal de 220 V se tendrá que el valor pico a pico es de $2 \times \sqrt{2}(220V) \cong 622V$ *pico a pico*.

2.1.5 Valor Medio, Factor de Forma

El valor medio o componente de cc, presente en una onda, es de importancia en los análisis posteriores de circuitos de ca.

En una corriente alterna senoidal, las cargas eléctricas (los electrones libres) circulan en un sentido durante un semiciclo y en el sentido contrario durante el semiciclo siguiente. Dado que la forma de variación es idéntica en los dos casos, al cabo de cada ciclo completo, la carga neta transportada por la corriente alterna es nula; por lo que se dice que tiene un *valor medio* nulo. En general, el *valor medio* puede expresarse como sigue:

$$I_M = \frac{1}{T} \int_0^T I_P \sin \omega t \, dt \quad (2.10)$$

Aquí se tomó una onda de corriente, pero es válido también para la tensión y, en general, para cualquier onda senoidal.

Volviendo al ejemplo anterior de la corriente alterna senoidal, si consideramos solo un semiciclo veremos que hay un transporte neto de carga; por lo que podemos llamar *valor medio de la corriente alterna* a la intensidad de una



corriente continua que transporta la misma cantidad de cargas que la corriente alterna, en un intervalo de tiempo igual a un semiciclo.

Haciendo un razonamiento matemático veríamos que, el valor medio de las cargas transportadas por la corriente alterna durante un semiciclo, es proporcional al área encerrada bajo la curva, durante ese semiciclo.

Resolviendo la ecuación (2.10) para un semiciclo tendremos:

$$I_M = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_P \sin \omega t \, dt = \frac{2I_P}{T\omega} [-\cos \omega t]_0^{T/2} = \frac{2I_P}{T\omega} \{ -[(-1) - 1] \} = \frac{4I_P}{T\omega}$$

$$\boxed{I_M = \frac{2I_P}{\pi}} \quad (2.11)$$

Ya que $\omega = 2\pi/T$

Si bien hasta ahora nos hemos limitado a la consideración de ondas senoidales, aparecen a menudo en los circuitos eléctricos y electrónicos otras formas de onda, tales como la onda triangular y la onda cuadrada, entre otras. Para cada onda en particular existen relaciones determinadas entre los tres valores característicos: valor pico, valor eficaz y valor medio. Para una onda cuadrada o rectangular como la de la figura 2.2b, los tres valores característicos son iguales, como es fácil advertirlo. En la onda triangular de la figura 2.2c podemos demostrar que el valor medio es la mitad del valor pico y el valor eficaz es igual al valor pico dividido $\sqrt{3}$.

En ciertas aplicaciones técnicas, es útil tener en cuenta la relación existente entre el *valor eficaz* y el *valor medio* de la onda, llamada *factor de forma*. Para la onda senoidal es igual a:

$$\text{Factor de Forma} = \frac{I_{RMS}}{I_M} = \frac{I_P / \sqrt{2}}{2I_P / \pi} = 1,11 \quad (2.12)$$

En la onda cuadrada, el factor de forma es igual a la unidad (1) y en la onda triangular es $2/\sqrt{3} \cong 1,15$.

El factor de forma es una medida de cuanto se aleja la forma de una onda, de la onda cuadrada. A mayor factor de forma, mayor es la diferencia de forma respecto de la cuadrada.

El concepto de valor medio, pero para todo un ciclo, es también útil cuando tenemos ondas como el caso de la figura 2.5a. Esta onda puede obtenerse colocando una tensión de cc de 5 V en serie con una onda senoidal de un valor pico de 10 V, como se muestra en la figura 2.5b. En sistemas electrónicos donde se presentan ambas señales de cc y ca, las ondas como las de la figura 2.5a aparecerán con bastante frecuencia.

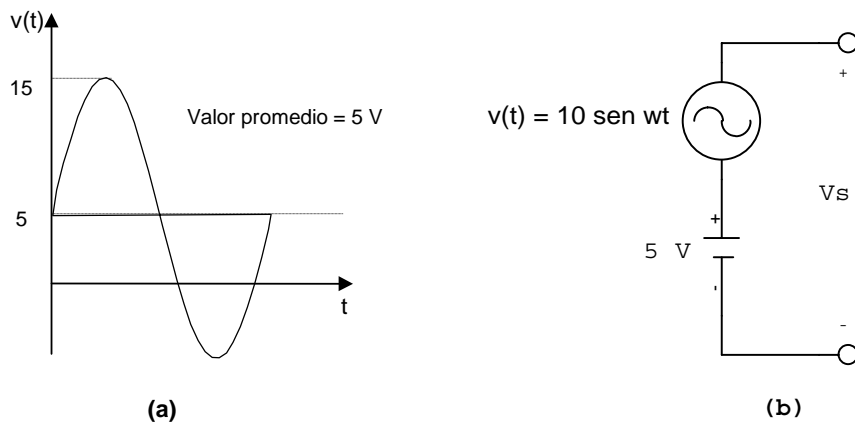


Figura 2.5 Efecto de una tensión continua en el valor medio de una onda senoidal

2.1.6 Fase, Angulo de Fase y Diferencia de Fase

La fracción de ciclo que ha transcurrido desde que una tensión o una corriente o, en general, una onda ha pasado por un determinado punto de referencia (generalmente en el comienzo o 0°) se denomina *fase* o *ángulo de fase* de la onda. Esto es útil en la descripción matemática de la onda pero, en un problema de ca, veremos que lo que importa son las fases relativas de las tensiones o corrientes senoidales.

Volviendo a la figura 2.4, vemos que la onda senoidal corta al eje horizontal cuando t o ϕ son iguales a cero, por lo cual la onda se dice que tiene fase cero ($\phi = 0$); esto quedó expresado en la ecuación (2.4). Si la onda senoidal corta al eje antes o después de 0° , se tiene que agregar un término por el desfase a la expresión de la ecuación mencionada.

Para las intersecciones antes de 0° (a la izquierda del eje cero), ilustrada en la figura 2.6, la expresión quedará como sigue:

$$v(t) = V_p \text{ sen } (\omega t + \phi) \quad (2.13)$$

En el caso que la onda intersekte al eje horizontal después de 0° (a la derecha del eje cero), ilustrada en la figura 2.7, la expresión quedará como sigue:

$$v(t) = V_p \text{ sen } (\omega t - \phi) \quad (2.14)$$

Si analizamos ahora la figura 2.8, se ve que existe una onda que está desfasada un ángulo ϕ respecto de la senoide de la figura 2.4; particularmente, en este caso v_2 está adelantada respecto de v_1 , ya que la primera pasa antes por el valor cero que la segunda. Es decir que se puede determinar una *relación de fase*

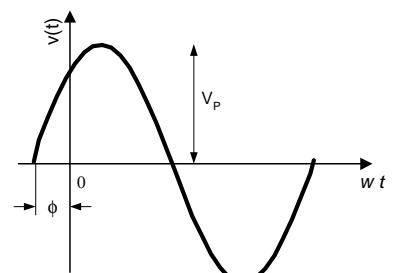


Figura 2.6 Angulo de fase inicial, en adelante

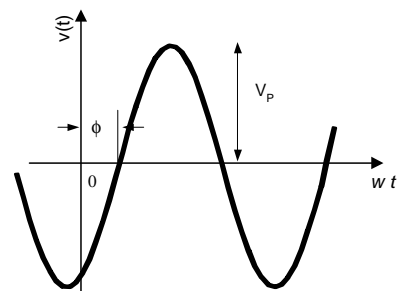


Figura 2.7 Angulo de fase inicial, en atraso



entre las dos ondas y, particularmente, el ángulo ϕ que forman los dos vectores giratorios se llama *ángulo de diferencia de fase*.

Nótese que solo se podrá definir la diferencia de fase entre dos ondas senoidales si son de la *misma frecuencia*. Además, para comparar las fases deben tomarse los cruces de pendiente positiva (valores crecientes con el tiempo) en ambas ondas o, en su defecto, ambos cruces de pendiente negativa (valores decrecientes con el tiempo), pero nunca uno de un tipo y otro del tipo restante.

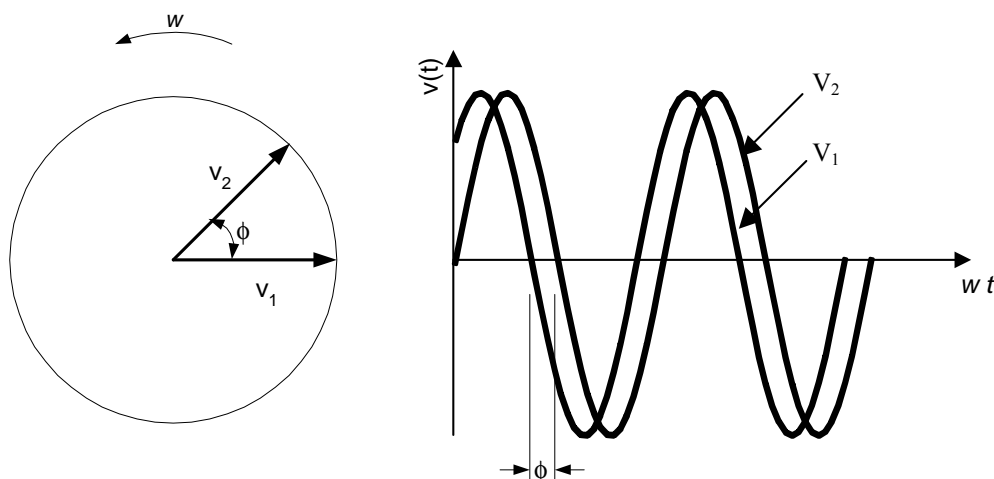


Figura 2.8 Ángulo de diferencia de fase entre dos tensiones senoidales

2.1.7 Potencia en Corriente Alterna

2.1.7.1 Potencia Activa. Factor de Potencia

En una red de corriente alterna, los elementos resistivos son los únicos componentes que disipan energía eléctrica. Los elementos inductivos y capacitivos, llamados *elementos reactivos*, simplemente almacenan energía de tal modo que pueda ser regresada al sistema eléctrico cuando el diseño del circuito lo requiera. Estos conceptos comenzaron a analizarse en los circuitos de corriente continua, ya vistos, y se completarán cuando tratemos *Impedancias*, en el presente capítulo.

Supongamos que la intensidad de la corriente y la tensión en una cierta porción de la red están dadas por:

$$\begin{aligned} i &= I_p \text{ sen } \omega t \\ v &= V_p \text{ sen}(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Donde se ha introducido el ángulo de diferencia de fase ϕ para prever la posibilidad de que tensión e intensidad no estén en concordancia de fase. La potencia instantánea p es, por lo tanto:

$$p = vi = V_p I_p [\text{sen } \omega t][\text{sen}(\omega t + \phi)] \quad (2.16)$$



Según la ecuación anterior, la potencia instantánea varía con el tiempo e incluso puede hacerse negativa, tal como se observa en la figura 2.9. La interpretación de la potencia negativa en la ecuación (2.16) es que durante una porción del ciclo, esta parte del circuito entrega potencia al resto del circuito (esto se clarificará cuando se introduzca el concepto de reactancia capacitiva y reactancia inductiva). Durante el resto del ciclo, cuando la potencia instantánea es positiva, el resto del circuito entrega potencia a la parte en estudio.

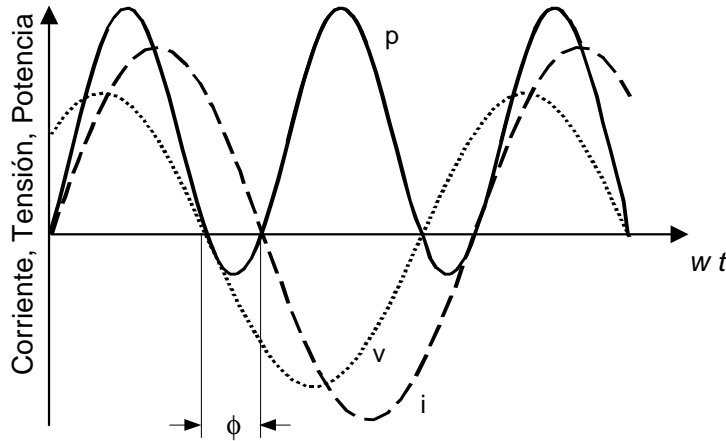


Figura 2.9 Potencia instantánea en un circuito de ca

La potencia media se obtiene promediando la ecuación (2.16) para un ciclo completo:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v i dt = \frac{V_P I_P}{T} \int_0^T [\sin \omega t][\sin(\omega t + \phi)] dt \quad (2.17)$$

El factor dentro de la integral puede desarrollarse empleando una relación trigonométrica conocida:

$$P = \frac{V_P I_P}{T} \left[\left(\cos \phi \int_0^T \sin^2 \omega t dt \right) + \left(\sin \phi \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt \right) \right] \quad (2.18)$$

Ambas integrales son formas conocidas y pueden calcularse directamente, dando:

$$P = \frac{V_P I_P}{2} \cos \phi \quad (2.19)$$

$$\boxed{P = V_{RMS} I_{RMS} \cos \phi} \quad (2.20)$$



Donde V_{RMS} e I_{RMS} son valores eficaces. De aquí en adelante, para simplificar la notación, se asumirá que V e I se referirán a V_{RMS} e I_{RMS} , respectivamente.

El significado de la ecuación (2.20) es que la potencia útil o *potencia activa* en los circuito de ca, medida en watts, no solo depende de la amplitud de la corriente y de la tensión en el circuito en estudio, sino que también depende de la diferencia de fase que presentan. Al término $\cos \phi$ se lo llama *Factor de Potencia del circuito*.

Obsérvese que cuando la diferencia de fase es de 90° , el factor de potencia es nulo y no se desarrolla en la carga ninguna potencia eléctrica útil. Por lo tanto, la tensión y la corriente podrán ser muy grandes y, en consecuencia, podrá ser muy elevada la potencia instantánea aun cuando sea nula la potencia media. Este es el caso de un circuito que contiene solo elementos reactivos, como se verá más adelante.

En cambio, cuando la tensión y la corriente están en concordancia de fase, el factor de potencia es igual a la unidad y la potencia es igual al producto de la tensión por la corriente, como en los circuitos de cc. Tal es el caso de circuitos que contienen solo elementos resistivos.

Entonces, el *factor de potencia* es una medida de la diferencia en la demanda de energía respecto a un circuito con elementos puramente resistivos. Cuando $\cos \phi$ se aproxima a uno (1), o sea cuando el valor de la parte resistiva es mucho más importante en el circuito, en relación con la parte reactiva, la potencia suministrada se disipa; mientras que cuando el valor de la parte reactiva es mucho más importante en el circuito, $\cos \phi$ tiende a cero (0) y más energía se almacena en los elementos reactivos, en vez de disiparse.

El valor comercial adoptado como óptimo es de $\cos \phi = 0,8$, según normas.

2.1.7.2 *Potencia Aparente. Potencia Reactiva*

Los elementos reactivos ideales no disipan energía eléctrica. Esto no significa que no debe existir energía eléctrica disponible en la fuente de alimentación; porque necesitan absorber energía eléctrica, en un determinado momento y almacenarla en forma de campos eléctricos o magnéticos, para luego, en otro determinado momento, devolverla al sistema. Esta energía adicional puede suministrarse sólo mediante un incremento de la corriente de la fuente de alimentación.

El producto VI , el cual es independiente de si el resultado es disipación o almacenamiento, se llama *Potencia Aparente* de un sistema de corriente alterna y se mide en volt-ampere (VA). Es decir:

$$\boxed{S = VI} \quad (2.21)$$

Las industrias y los grandes consumidores de energía pagan por la demanda de potencia aparente en lugar de por la potencia activa o promedio disipada, debido a la demanda de corriente por encima de la de los elementos resistivos. En realidad, los generadores deben poder entregar la potencia aparente, en vez de la potencia activa. Cualquier factor de potencia menor que 1 dará como resultado una demanda de watts menor que la demanda de volt-ampere.

Con base en la trigonometría, la potencia aparente y la potencia activa están relacionadas como se muestra en la figura 2.10. El tercer componente del triángulo es similar a la ecuación de la potencia activa salvo por el término seno

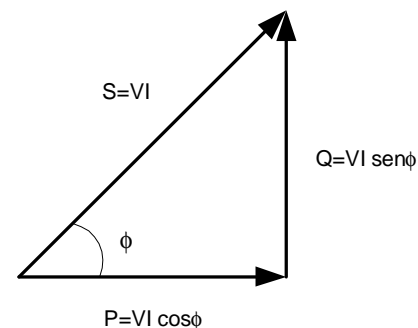


Figura 2.10 Triángulo de Potencia



en lugar de coseno. Esta potencia se llama *Potencia Reactiva* y se mide en unidades de volt-ampere reactivos (VAR, volt-ampere reactive). Es decir:

$$Q = VI \sin \phi \quad (2.22)$$

La potencia reactiva es una medida de la potencia de entrada absorbida (pero no disipada) por los elementos reactivos. Para un suministro de tensión fijo mientras menor es esta componente, menor es la corriente de fuente. La eficiencia máxima del sistema se obtiene (en cuanto a la fuente) cuando $Q = 0$ y $P = S$.

2.1.8 Escala Logarítmica. Decibel. Diagramas de Bode

Normalmente se emplean escalas lineales para representar diferentes magnitudes bajo estudio o se emplean como escalas en una gráfica determinada, tal como las hemos utilizado en el presente texto. Pero existe otro tipo de escala muy empleada, la *escala logarítmica*. Esta es particularmente importante en mediciones que comprenden un rango muy amplio, tales como mediciones de luz, sonido, frecuencias, etc.

Las mediciones logarítmicas pueden realizarse usando números logarítmicos en base 10 (común) o base e (natural o neperiano). De hecho, estas dos bases solo difieren por una constante fija. En electricidad y electrónica se emplean las escalas logarítmicas con base 10.

Las ganancias o pérdidas de los circuitos o sistemas se especifican frecuentemente en *decibeles (dB)*.

Antes de dar la ecuación que expresa la ganancia o pérdida de un circuito en dB, repasemos la representación de un circuito tipo según la esquematización llamada de *cuadripolo*, mostrada en la figura 2.11. Según esto, todo circuito puede ser reemplazado por una *caja negra* con dos terminales de entrada y dos terminales de salida; donde, con dichos terminales, el circuito interactúa con el mundo exterior.

Las ganancias o pérdidas de los circuitos o sistemas, entonces, se expresan en dB, según la siguiente ecuación:

$$Ganacia = 10 \log \left(\frac{P_{sal}}{P_{ent}} \right) \quad [dB] \quad (2.23)$$

Si la potencia de salida es menor que la potencia de entrada, entonces el resultado en dB será menor que cero (0) y tendremos una pérdida, en vez de una ganancia.

En la Tabla 2.1 se puede observar valores en dB, para distintas combinaciones de relación de potencias.

Hay tres razones por las que en ingeniería eléctrica se utiliza la escala de dB para describir las ganancias, las pérdidas y los niveles de señal, a saber:

- A) Debido a la naturaleza compresiva de la función logarítmica, los números involucrados en un cálculo en dB resultan moderados en comparación con los de una escala lineal, tal como ya lo expresáramos. Esta característica de la medición en dB es muy útil cuando se grafican cantidades que varían mucho en amplitud.

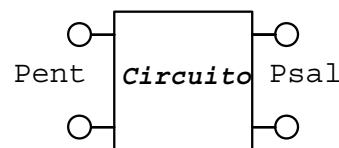


Figura 2.11 Cuadripolo

Tabla 2.1

Psal / Pent	dB
1	0
2	3,01
5	6,99
10	10
20	13,01
50	16,99
100	20
200	23,01
500	26,99
1000	30



- B)** Las ganancias en dB se suman cuando se pasa por sistemas en cascada; esto es, circuitos conectados en serie (uno en *cascada* respecto del otro).

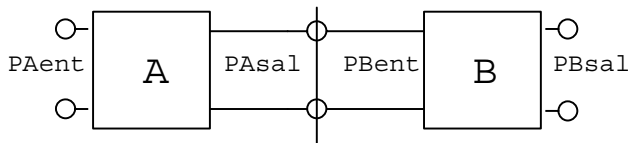


Figura 2.12 Sistemas en cascada. La salida del circuito A es la entrada del circuito B

Si observamos la figura 2.12, veremos que la potencia de salida del circuito A es la potencia de entrada del circuito B, por lo que la ganancia combinada del sistema es:

$$G_{db} = 10 \log \left(\frac{PB_{sal}}{PA_{ent}} \right) = 10 \log \left(\frac{PA_{sal}}{PA_{ent}} \times \frac{PB_{sal}}{PB_{ent}} \right) = 10 \log \left(\frac{PA_{sal}}{PA_{ent}} \right) + 10 \log \left(\frac{PB_{sal}}{PB_{ent}} \right)$$

$$\boxed{G_{dB} = GA_{db} + GB_{db}} \quad (2.24)$$

Esta característica resulta de la propiedad de los logaritmos que establece que el logaritmo del producto de variables es igual a la suma de los logaritmos de las variables.

- C)** Con las mediciones en dB es factible graficar de manera especial a las características de un circuito (ya sea éste un amplificador, un filtro u otro tipo de circuito). La *Gráfica o Diagrama de Bode* (nombrada así por H. W. Bode, 1905-1982) es una gráfica del logaritmo de una potencia contra el logaritmo de una frecuencia. Obviamente, en general es factible representar también el logaritmo de una función vs. el logaritmo de la variable independiente de esa función; pero Bode se emplea generalmente para representar una potencia, una ganancia o una relación de tensiones, en función de la frecuencia. Es una gráfica doble logarítmica. En la figura 2.13 se puede observar una gráfica típica de Bode.

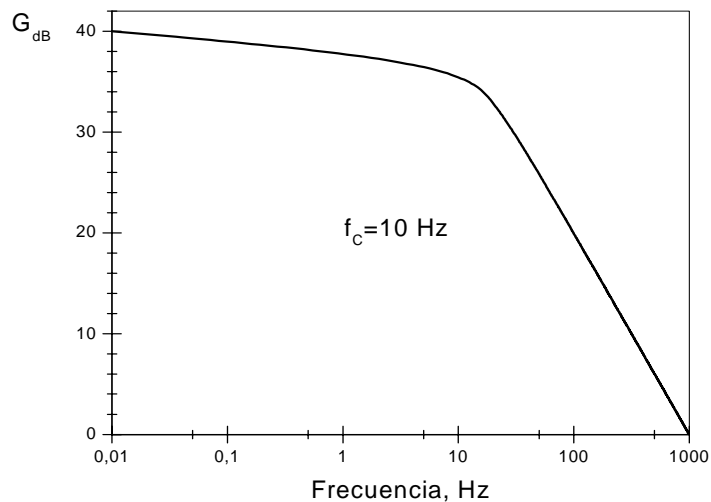


Figura 2.13 Diagrama de Bode



Los Diagramas de Bode son útiles de dos aspectos. Como se indicó en el punto A), la escala logarítmica permite la representación de un intervalo amplio tanto de potencias como de frecuencias. En el caso de la figura, la escala vertical de 0 a 40 dB representa un intervalo de ganancia de potencia de 1 a 10.000. De modo similar, la escala horizontal representa cuatro décadas en frecuencia (factores de 10).

La otra ventaja de los diagramas de Bode es que, a menudo, las características o respuestas en frecuencia de ciertos circuitos, tal el caso de filtros, son convenientes representarlas por líneas rectas. Esto se muestra en la figura 2.14, que corresponde a un filtro pasa-bajos, como se verá más adelante, en el curso regular de Electrónica. Solo en las cercanías del vértice (frecuencia f_c), la gráfica de Bode se separa significativamente de las líneas rectas, mientras que a frecuencias muy bajas ($f \ll f_c$) y a frecuencias muy altas ($f \gg f_c$), la gráfica prácticamente coincide con las líneas rectas. Esta aproximación mediante líneas rectas se la conoce como *gráfica asintótica de Bode*.

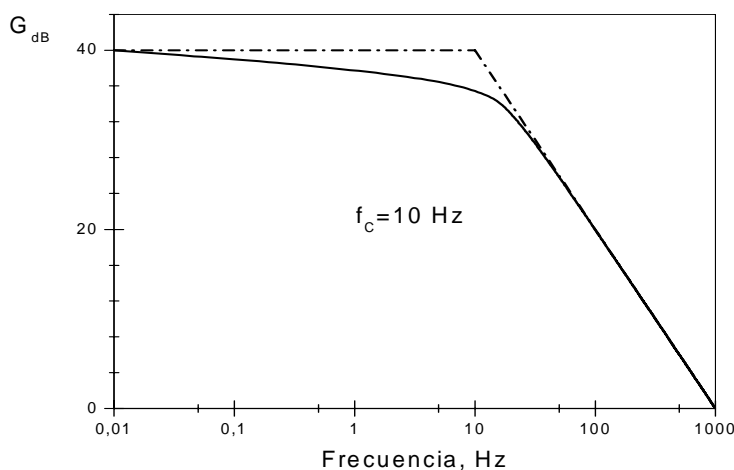


Figura 2.14 Diagrama Asintótico de Bode

Particularmente para la gráfica de la figura, correspondiente a un filtro pasabajo, tenemos que en el vértice (frecuencia de corte f_c) la separación es igual a 3 dB, por ello se denomina a f_c como la *frecuencia de -3 dB*.

2.1.9 Impedancia en Corriente Alterna

2.1.9.1 Resistencia

En la figura 2.15 un generador aplica una tensión senoidal a un resistor. Los valores máximos de tensión y corriente están relacionados directamente por la ley de Ohm:

$$I_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x}}{R} \quad (2.25)$$

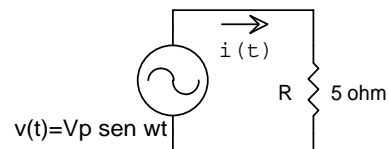


Figura 2.15 Red resistiva de corriente alterna



Además, al ser la resistencia un valor real, el resistor no provoca desfaseamiento y, por lo tanto, v_R e i_R están *en fase*. Nótese que tanto las frecuencias de v_R como de i_R también son las mismas.

La potencia entregada al resistor se determina aplicando la ecuación (2.20), donde el factor de potencia $\cos \phi$ es 1, ya que no hay desfase entre las ondas. En ese caso:

$$P_R = VI \cos 0^\circ = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Esto es igual a lo determinado para las redes de cc, solo que aquí los valores de V e I son eficaces.

En un resistor *ideal* la resistencia no cambia con la frecuencia. En un resistor *real* en cambio, existen elementos capacitivos e inductivos parásitos que afectan sus características a muy altas y a muy bajas frecuencias (aunque en estas últimas es de muy bajo valor y, en general, no se toman en cuenta).

2.1.9.2 Reactancia Capacitiva

El comportamiento de un inductor y de un capacitor a una señal de ca es completamente diferente a la vista para el resistor. Ambos limitan la magnitud de la corriente, aunque ninguno de ellos (en teoría) disipa una parte de la energía eléctrica que reciben. Solo la almacenan en forma de campo magnético, en el caso del inductor, o en forma de campo eléctrico, en el caso del capacitor, con la capacidad de regresarla al sistema eléctrico, posteriormente.

Para el caso del capacitor puro o ideal, es posible demostrar (lo que está fuera del alcance de este texto) que la *reactancia capacitiva* está determinada por:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (2.26)$$

Analizando la ecuación (2.26) vemos que al incrementarse la frecuencia, la reactancia de un capacitor disminuye. Además, cuando $f = 0$, tenemos que $X_C \rightarrow \infty$, o sea un valor sumamente grande, que corresponde a un circuito abierto, de manera equivalente a como se describió en el caso de redes de cc. A frecuencias muy altas, la característica de un capacitor se aproximan a las de un cortocircuito.

Si como se indica en la figura 2.16a, se le aplica una tensión senoidal a un capacitor, también es factible aplicar la ley de Ohm para relacionar los valores máximos:

$$I_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}}}{X_C} \quad (2.27)$$

Cuando veamos el análisis por números complejos y fasores, se verificará que existe un desfaseamiento de 90° , donde i_C adelanta 90° a v_C , lo que es diferente a lo establecido para el resistor. Esto se muestra en la figura 2.16b.

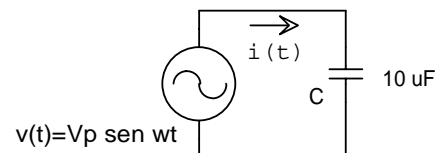


Figura 2.16a Red capacitiva simple de corriente

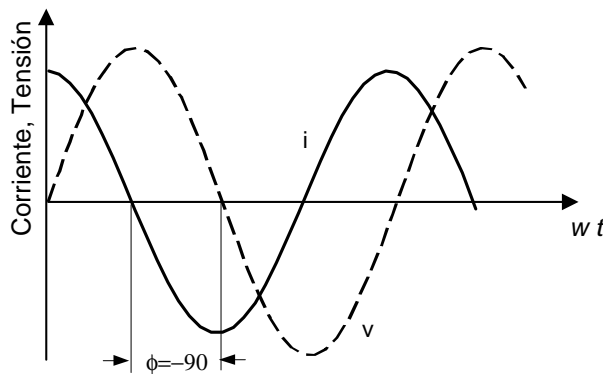


Figura 2.16b Tensión y corriente sobre el capacitor de la figura 2.16^a

Si aplicamos la ecuación (2.20) para calcular la potencia entregada al capacitor, tendremos:

$$P_C = VI \cos(-90^\circ) = VI \times 0 = 0$$

La potencia activa es nula, lo cual corrobora lo dicho sobre que el capacitor puro no disipa energía eléctrica, sino que solamente la almacena en forma de campo eléctrico. El signo menos de los 90° se debe a que en la obtención de la ecuación (2.20) se consideró que la corriente atrasaba respecto de la tensión, situación que aquí es exactamente al revés.

2.1.9.3 Reactancia Inductiva

Para el caso del inductor puro, es posible demostrar (lo que está fuera del alcance de este texto) que la *reactancia inductiva* está determinada por:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (2.28)$$

Donde se ve que la reactancia inductiva es directamente proporcional a la frecuencia de la señal aplicada. Cuando $f = 0$ tenemos que $X_L = 0$, lo que coincide con lo estudiado en redes de cc, referente a que un inductor puro se comporta como un cortocircuito en los sistemas cc de estado constante. A frecuencias muy altas, el inductor se comporta como un circuito abierto, como surge de la ecuación (2.28).

De manera similar a lo establecido para capacitores, si como se indica en la figura 2.17a, se le aplica una tensión senoidal a un inductor, es factible aplicar la ley de Ohm para relacionar los valores máximos:

$$I_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x}}{X_L} \quad (2.29)$$

Aquí también cuando veamos el análisis por números complejos y fasores, se verificará que existe un desfaseamiento de 90° , donde i_C *atrás* 90° a v_C , lo que

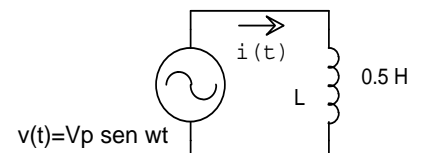


Figura 2.17a Red inductiva simple de corriente alterna.



es contrario a lo que se encontró para el caso del capacitor. Esto se muestra en la figura 2.17b.

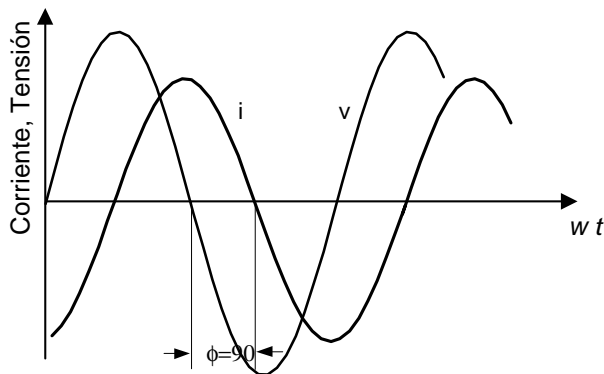


Figura 2.17b Tensión y corriente sobre el inductor de la figura 2.16^a

Si aplicamos la ecuación (2.20) para calcular la potencia entregada al inductor, tendremos:

$$P_L = VI \cos 90^\circ = VI \times 0 = 0$$

Aquí la potencia activa también es nula, lo cual corrobora lo dicho sobre que el inductor puro no disipa energía eléctrica, sino que solamente la almacena en forma de campo magnético.

2.1.9.4 Análisis en el campo de los Complejos. Fasores

Un *vector* es una cantidad que tiene tanto *magnitud* como *dirección*. Los vectores se pueden emplear para representar corrientes o tensiones de ca y reactancias. El empleo de vectores permite determinar el o los ángulos de fases de corrientes, tensiones y reactancias en redes complejas; tarea que de otra manera sería muy complicada.

Se empleará la notación en **negrita** para indicar que es un vector: Por ejemplo, el vector de la tensión sobre una resistencia se indicará como \mathbf{V}_R .

En la figura 2.18 se muestra la representación vectorial de la resistencia, la reactancia inductiva y la reactancia capacitiva. El ángulo que acompaña a cada vector está determinado por el desfase entre la tensión y la corriente de cada uno de los elementos. El ángulo es 0° para la resistencia, como ya lo estudiamos, por lo que no hay desfase. Como el ángulo se mide a partir del eje horizontal derecho, el vector de la resistencia aparece sobre ese eje, estando su longitud determinada por el valor de R . En el caso de \mathbf{X}_L y \mathbf{X}_C , el ángulo incluido es el ángulo de adelanto de la tensión con respecto a la corriente (tomada esta como referencia) que circula por el componente. El de \mathbf{X}_L es de $+90^\circ$ y el de \mathbf{X}_C es de -90° . La reactancia de cada elemento determina las longitudes de los vectores.

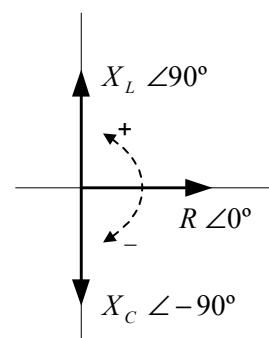


Figura 2.18 Vectores de Impedancia



Cualquiera o una combinación de los elementos resistivos o reactivos mostrados en la figura 2.18 se denomina *impedancia* y se designa con el símbolo \mathbf{Z} . Esta mide la capacidad de la red de ca de *impedir* el flujo de la carga o corriente que circula por la red. El diagrama de la figura 2.17 con uno o cualquier número de elementos se llama *diagrama de impedancias*.

Las tensiones y corrientes aparecen en un *diagrama fasorial* como el mostrado en la figura 2.19, para cada elemento. El ángulo asociado con cada cantidad es el ángulo de fase que aparece en el dominio de tiempo. La magnitud es el valor eficaz de la cantidad senoidal. La magnitud con el ángulo asociado se designa como *fasor*. Observando la figura 2.19(b), vemos que si \mathbf{V}_L e \mathbf{I}_L fueran vectores que están girando en el sentido contrario al de las agujas del reloj, \mathbf{V}_L adelantaría a \mathbf{I}_L por 90° . Igual análisis se puede desarrollar para los otros diagramas.

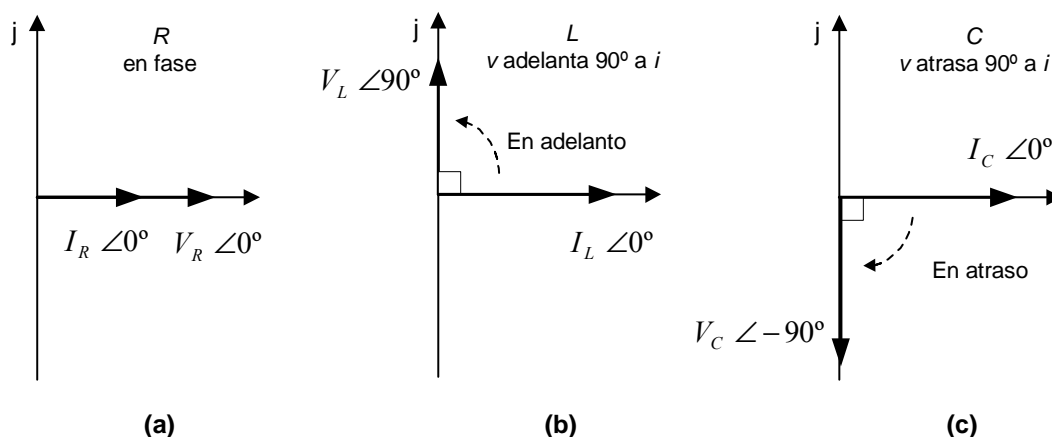


Figura 2.19 Diagramas fasoriales: (a) resistor puro; (b) inductor puro; (c) capacitor puro

Para que la notación fasorial o la vectorial representada sea de utilidad en los análisis futuros, se deberá ser capaz de realizar ciertas operaciones básicas con los fasores o vectores. Téngase en cuenta, sin embargo, que el término *fasor* se aplica solo a los vectores que representan una cantidad senoidal. Los componentes vectoriales de un diagrama de impedancia no son fasores.

Hay dos formas de representar un vector, tal como el indicado en la figura 2.20. Una *forma polar*, donde se representa por su magnitud y su ángulo medido a partir del eje horizontal, y una *forma rectangular*, donde se representa con sus componentes horizontal y vertical, sobre los ejes cartesianos.

Las ecuaciones necesarias para pasar de una forma a la otra son:

$$\begin{aligned} A &= C \cos \phi \\ B &= C \sin \phi \end{aligned} \quad \begin{aligned} C &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{B}{A} \end{aligned} \quad (2.19)$$

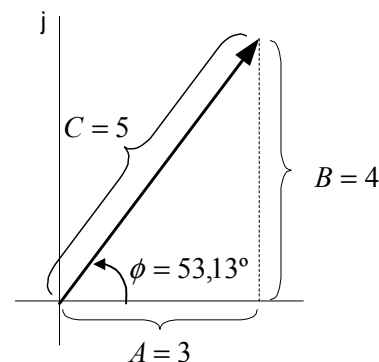


Figura 2.20 Representación de un vector

Se incluye la letra j en la forma rectangular para distinguir entre las componentes reales (horizontal) e imaginaria (vertical) de la forma rectangular. Los términos real e imaginario están relacionados únicamente con la definición matemática y, por lo tanto, no requieren de un estudio más a fondo, para los fines del presente texto.



La definición matemática de la letra j es $\sqrt{-1}$, por lo que algunas operaciones se establecen como:

$$\begin{aligned} j &= \sqrt{-1} \\ j^2 &= (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ j^3 &= j^2 j^1 = (-1)(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1} = -j \\ j^4 &= j^2 j^2 = (-1)(-1) = +1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Aun cuando las cuatro operaciones de suma, resta, multiplicación y división pueden ser realizadas todas en la forma rectangular o todas en la forma polar; por simplicidad y rapidez es conveniente que las operaciones de suma y resta se lleven a cabo en la forma rectangular y las de multiplicación y división se realicen en la forma polar. Si las cantidades están en una u otra forma, previo a efectuar las operaciones, se deberán realizar las conversiones correspondientes, según las ecuaciones (2.19).

Según lo indicado, se puede establecer:

a) *Suma (forma rectangular):*

$$(A_1 + jB_1) + (A_2 + jB_2) = (A_1 + A_2) + j(B_1 + B_2) \quad (2.21)$$

b) *Resta (forma rectangular):*

$$(A_1 + jB_1) - (A_2 + jB_2) = (A_1 - A_2) + j(B_1 - B_2) \quad (2.22)$$

c) *Multiplicación y División (forma polar):*

$$(C_1 \angle \phi_1)(C_2 \angle \phi_2) = C_1 C_2 \angle (\phi_1 + \phi_2) \quad (2.23)$$

$$\frac{C_1 \angle \phi_1}{C_2 \angle \phi_2} = \frac{C_1}{C_2} \angle (\phi_1 - \phi_2) \quad (2.24)$$

Veamos ahora la aplicación del álgebra fasorial a los **elementos básicos RLC**, con lo cual observaremos el efecto de asociar un ángulo a los elementos resistivos y reactivos. Si recordamos lo graficado en la figura 2.19, vemos:

$$\begin{aligned} Z_R &= R \angle 0^\circ \\ Z_L &= X_L \angle 90^\circ \\ Z_C &= X_C \angle -90^\circ \end{aligned} \quad (2.25)$$



Al asociar un ángulo con cada vector de impedancia, ya no será necesario recordar las relaciones de fase entre las corrientes y las tensiones de cada elemento.

Consideremos el resistor de la figura 2.21 para el cual se da la tensión y se debe determinar la corriente:

$$I_R = \frac{V}{Z_R} = \frac{V \angle \phi}{R \angle 0^\circ} = \frac{V}{R} \angle \phi - 0^\circ = \frac{V}{R} \angle \phi$$

Se observa que V e I están en fase, ya que tienen el mismo ángulo ϕ . Al asociar 0° con la resistencia, se pudo usar el álgebra fasorial y se mantuvieron las relaciones de fase apropiadas entre la corriente y la tensión.

Para el inductor de la figura 2.22, se tiene:

$$I_L = \frac{V}{Z_L} = \frac{V \angle \phi}{X_L \angle 90^\circ} = \frac{V}{X_L} \angle \phi - 90^\circ$$

Esto indica que I está atrasada 90° -respecto de la tensión y que su magnitud (valor eficaz) es de V/X_L .

Finalmente, para el capacitor de la figura 2.23, tenemos:

$$I_C = \frac{V}{Z_C} = \frac{V \angle \phi}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{V}{X_C} \angle \phi + 90^\circ$$

Vemos que la corriente adelanta 90° -respecto de la tensión y, de nuevo, su magnitud se determina por la ley de Ohm.

2.1.10 Generalización de la Ley de Ohm para corriente alterna

Como analizamos en los puntos 2.1.9.1 al 2.1.9.3 del presente texto, es factible emplear la ley de Ohm en corriente alterna, pero con ciertos recaudos. Si ahora introducimos los conceptos de análisis fasorial e impedancia en corriente alterna, podemos generalizar el concepto.

La Ley de Ohm generalizada establece que la relación entre la tensión aplicada a una impedancia y la corriente que circula por ella, como consecuencia de dicha tensión, es igual a la siguiente relación vectorial:

$$\boxed{I = \frac{V}{Z}} \quad (2.26)$$

Donde, según las ecuaciones (2.19), se tiene que la magnitud de la corriente y la diferencia de fase entre la tensión y la corriente son iguales a:

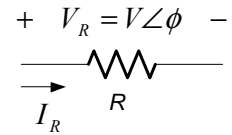


Figura 2.21 Resistor puro

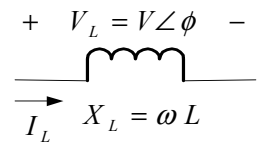


Figura 2.22 Inductor puro

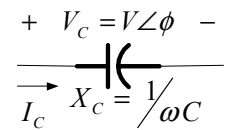


Figura 2.23 Capacitor puro



$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{(X_L - X_C)}{R} \quad (2.27)$$

Aquí estamos considerando que la impedancia genérica está compuesta por un resistor, un inductor y un capacitor, tal como se indica en la figura 2.24.

Las reactancia inductiva y capacitiva están 180° fuera de fase, como se observó en la figura 2.18; por ello, la reactancia neta es el vector suma de la reactancia inductiva (X_L) y de la reactancia capacitiva (X_C) y es numéricamente igual a la diferencia aritmética entre X_L y X_C .

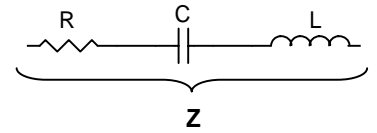


Figura 2.24 Impedancia

2.1.11 Impedancia de un Circuito Serie

El análisis de redes en serie de corriente alterna es muy similar al que se aplica a redes de cc en serie, con la salvedad de que aquí debe emplearse la notación vectorial para cada cantidad, en vez de solo la magnitud, como se hizo en corriente continua.

En una red de corriente alterna en serie, *la corriente es la misma a través de cada elemento* y, por lo tanto, la impedancia total es la suma vectorial de las impedancias de los elementos en serie. Esto es:

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_N \quad (2.28)$$

Para mayor claridad, veamos un ejemplo de circuito serie, tal como el indicado en la figura 2.25. Se reemplazará cada elemento por una impedancia de bloque, tal como se indica en la figura 2.26, lo que permitirá un análisis más simple y, además, permite una relación más directa con el análisis ya hecho para redes de cc. La impedancia total es la suma de vectores, según lo siguiente:

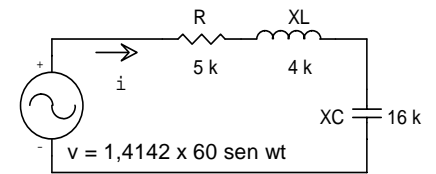
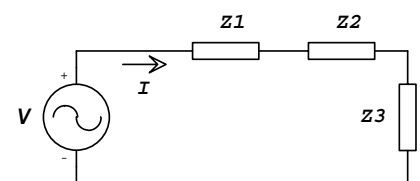


Figura 2.25 Red RLC en serie

$$\begin{aligned} Z_T &= Z_1 + Z_2 + Z_3 \\ &= (5 k\Omega + j0) + (0 + j4 k\Omega) + (0 - j16 k\Omega) \\ &= 5 k\Omega + j4 k\Omega - j16 k\Omega \\ &= 5 k\Omega - j12 k\Omega \\ &= 13 k\Omega \angle -67.38^\circ \end{aligned}$$

En la figura 2.27 se grafica el diagrama de impedancias. La corriente I es:

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{60V \angle 0^\circ}{13 k\Omega \angle -67.38^\circ} = 4.615 mA \angle 67.38^\circ$$



$$\begin{aligned} Z_1 &= 5 k\Omega \angle 0^\circ = 5 k\Omega + j0 \\ Z_2 &= 4 k\Omega \angle 90^\circ = 0 + j4 k\Omega \\ Z_3 &= 16 k\Omega \angle -90^\circ = 0 - j16 k\Omega \end{aligned}$$

Figura 2.26 Impedancias de bloque

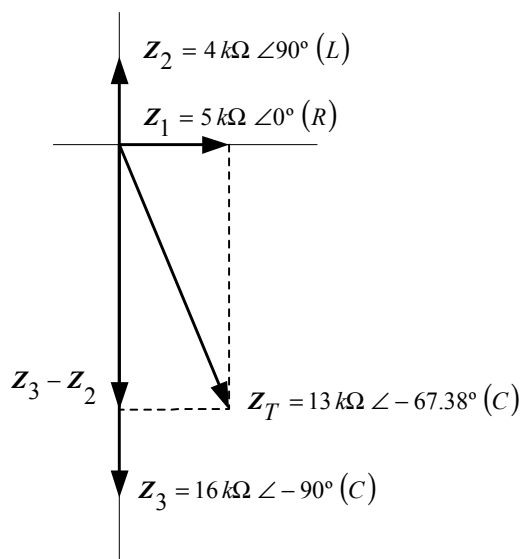


Figura 2.27 Diagrama de impedancias de la red RLC en serie de la figura 2.25

La tensión a través de cada elemento se obtiene de aplicar directamente la Ley de Ohm:

$$V_R = I R = (4.615 \text{ mA } \angle 67.38^\circ)(5 \text{ k}\Omega \angle 0^\circ) = 23.075 \text{ V } \angle 67.38^\circ$$

$$V_L = I Z_L = (4.615 \text{ mA } \angle 67.38^\circ)(4 \text{ k}\Omega \angle 90^\circ) = 18.46 \text{ V } \angle 157.38^\circ$$

$$V_C = I Z_C = (4.615 \text{ mA } \angle 67.38^\circ)(16 \text{ k}\Omega \angle -90^\circ) = 73.84 \text{ V } \angle -22.62^\circ$$

Se puede comprobar que sigue siendo válida la Ley de las Tensiones de Kirchhoff, ya que se verifica que la tensión V aplicada es la suma vectorial de las tensiones sobre cada elemento, según:

$$V = V_R + V_L + V_C$$

En la figura 2.28 aparece el diagrama fasorial de las tensiones y la corriente. Notesé que, al igual que las reactancias, las tensiones V_L y V_C están en oposición vectorial y que la corriente I va 90° detrás de la tensión V_L , adelante 90° del voltaje V_C y en fase con V_R .

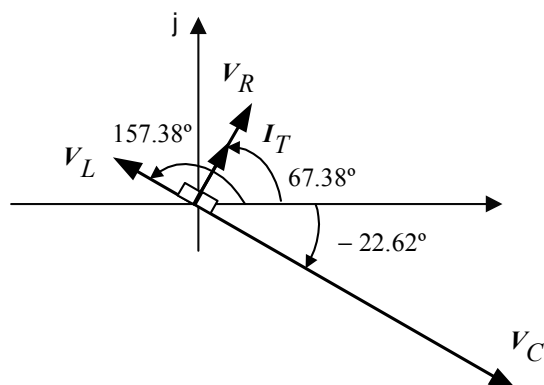


Figura 2.28 Diagrama fasorial de la red RLC en serie de la figura 2.25

Como vemos que la diferencia de fase entre la tensión de entrada V y la corriente total I_T es de 67.38° , el factor de potencia será

$$\cos \varphi = \cos (67.38^\circ) = \mathbf{0.3846 \text{ en adelante}}$$

El bajo factor de potencia está indicando que la red es altamente reactiva, lo que es visible en el diagrama de impedancias de la figura 2.27, donde Z_T tiene una gran componente reactiva.

2.1.12 Impedancia de un Circuito Paralelo

Aquí también, el análisis de circuitos paralelo en ca es muy similar al análisis efectuado en los circuitos de cc.

La inversa de la impedancia se llama *Admitancia* y se mide en *siemens* (S). Su ecuación es:

$$\boxed{Y = \frac{1}{Z}} \quad [\text{siemens, S}] \quad (2.29)$$

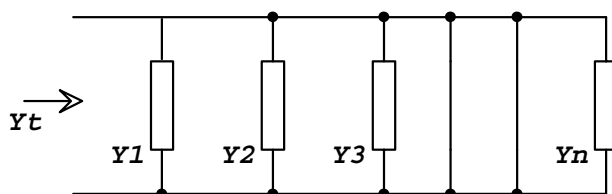


Figura 2.29 Admitancias en paralelo

En una red en paralelo como la indicada en la figura 2.29, la admitancia total estará determinada por:



$$\boxed{Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_N} \quad (2.30)$$

o

$$\boxed{\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_N}} \quad (2.31)$$

Si tuviéramos solo dos impedancias en paralelo, entonces:

$$\boxed{Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} \quad (2.32)$$

La tensión en cada rama de la red de la figura 2.29 es la misma y la corriente se determina con la Ley de Corrientes de Kirchhoff. Otra manera de hallar la corriente es resolviendo la impedancia de entrada total (o admitancia) y luego aplicando la Ley de Ohm.

La inversa de la resistencia, al igual que en los circuitos de cc, se llama *Conductancia* y el ángulo asociado con ella es de 0° , como se indica en la siguiente ecuación:

$$\boxed{Y_R = G \angle 0^\circ = \frac{1}{R \angle 0^\circ}} \quad [S] \quad (2.33)$$

La inversa de la reactancia se denomina *Susceptancia* y también se mide en siemens. Para cada elemento tiene la siguiente notación y ángulo:

$$\boxed{Y_L = B_L \angle -90^\circ = \frac{1}{X_L \angle 90^\circ}} \quad [S] \quad (2.34)$$

$$\boxed{Y_C = B_C \angle 90^\circ = \frac{1}{X_C \angle -90^\circ}} \quad [S] \quad (2.35)$$

El diagrama de admitancias para una red RLC en paralelo, se indica en la figura 2.30

Aquí también, igual que lo hicimos en el caso de impedancias serie, veamos un ejemplo de red en paralelo, tal como el indicado en la figura 2.31. Si insertamos las impedancias de bloque, obtendremos la configuración indicada en la figura 2.32.

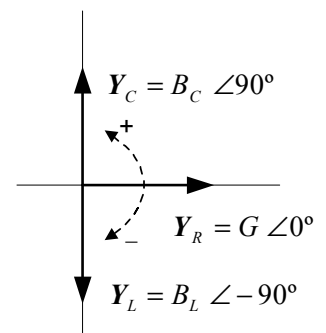


Figura 2.30 Diagrama de impedancias

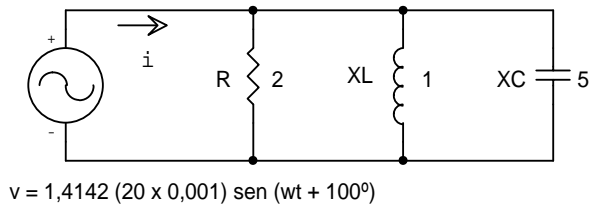


Figura 2.31 Red RLC en Paralelo

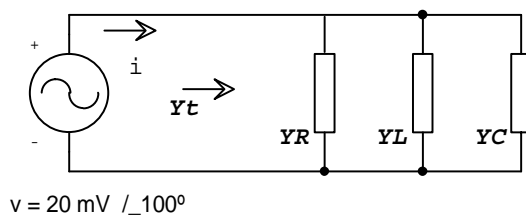


Figura 2.32 Admitancias en Bloque

La admitancia y la impedancia total se calcula como sigue:

$$Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{2\Omega \angle 0^\circ} = 0.5S \angle 0^\circ$$

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{1\Omega \angle 90^\circ} = 1S \angle -90^\circ$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{5\Omega \angle -90^\circ} = 0.2S \angle 90^\circ$$

La admitancia total es:

$$\begin{aligned} Y_T &= Y_R + Y_L + Y_C = \\ &= (0.5S + j0) + (0 - j1S) + (0 + j0.2S) \\ &= 0.5S + j(-1S + 0.2S) = 0.5S - j0.8S \\ &= \mathbf{0.943S \angle -58^\circ} \end{aligned}$$

y

$$Z_T = \frac{1}{Y_T} = \frac{1}{0.943S \angle -58^\circ} = \mathbf{1.06\Omega \angle 58^\circ}$$

En la figura 2.33 se muestra el diagrama de admitancias.

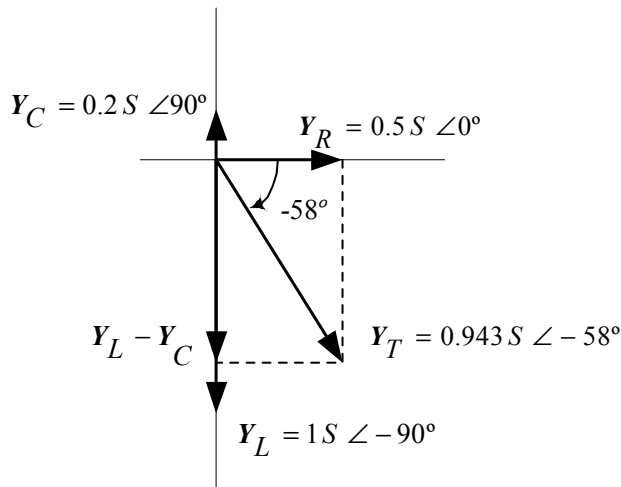


Figura 2.33 Diagrama de admitancias de la red RLC en paralelo de la figura 2.31

Se observa que, de manera análoga a como sucedía con las reactancias, aquí las suceptancias se hallan en oposición y, al ser la suceptancia inductiva la mayor, la red tiene características de retraso. Es decir que la tensión V aplicada adelanta a la corriente I total, en un ángulo dado por la Z_T .

La corriente de entrada se determina por la Ley de Ohm:

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{Z_T} = V Y_T = (20 \text{ mV } \angle 100^\circ)(0.943 \text{ S } \angle -58^\circ) = \\ &= 18.86 \text{ mA } \angle 42^\circ \end{aligned}$$

La corriente que circula por cada rama, también se calcula por la Ley de Ohm:

$$I_R = \frac{V}{Z_R} = \frac{20 \text{ mV } \angle 100^\circ}{2 \Omega \angle 0^\circ} = 10 \text{ mA } \angle 100^\circ$$

$$I_L = \frac{V}{Z_L} = \frac{20 \text{ mV } \angle 100^\circ}{1 \Omega \angle 90^\circ} = 20 \text{ mA } \angle 10^\circ$$

$$I_C = \frac{V}{Z_C} = \frac{20 \text{ mV } \angle 100^\circ}{5 \Omega \angle -90^\circ} = 4 \text{ mA } \angle 190^\circ$$

Se puede comprobar que si hubiéramos aplicado la Ley de las Corrientes de Kirchhoff, podríamos haber obtenido también a la corriente I a través de las corrientes de las ramas, según la suma vectorial:

$$I = I_R + I_L + I_C$$



En la figura 2.34 se muestra el diagrama fasorial de las corrientes y tensiones.

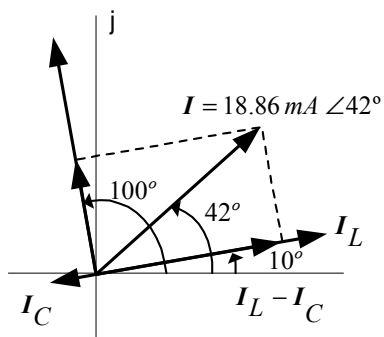


Figura 2.34 Diagrama fasorial de la red RLC en paralelo de la figura 2.31

El ángulo de fase de V simplemente ha girado al diagrama completo 100° , en el sentido contrario a las agujas del reloj. En la figura se muestra la suma de vectores que se requiere para determinar I ; por lo que puede compararse la solución vectorial con la que se obtuvo por cálculo, previamente.

La diferencia de fase entre V e I es de 58° (que es el ángulo de Z_T), por lo que el factor de potencia será:

$$\cos \varphi = \cos (58^\circ) = 0.5299 \text{ en atraso}$$

2.1.13 Divisor de tensión en corriente alterna

La regla del divisor de tensión se aplica exactamente de la misma manera que en las redes de cc, por lo que es válido todo lo que se planteó oportunamente.

En el ejemplo dado en el punto 2.1.11, podría encontrarse cualquiera de las tensiones a través de la regla del divisor de tensión, lo que elimina la necesidad de encontrar la corriente I primero. Por ejemplo, para V_L tendremos:

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{Z_2(V)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \frac{(4k\Omega \angle 90^\circ)(60V \angle 0^\circ)}{13 \times 10^3 \angle -67.38^\circ} = \frac{240V \angle 90^\circ}{13 \angle -67.38^\circ} \\ &= 18.46V \angle 157.38^\circ \end{aligned}$$

2.1.14 Redes de Corriente Alterna en Serie y en Paralelo

Como vimos ya en los circuitos de cc, existen infinitas combinaciones de configuraciones en serie y en paralelo. Las soluciones pueden ser complejas pero a pesar de ello, en las etapas iniciales, como primer paso deben buscarse las combinaciones obvias en serie y/o en paralelo, para luego proseguir hacia la impedancia o admitancia total del sistema y de allí encontrar la corriente o la tensión de la fuente. No siempre es necesario llegar hasta la fuente, por que depende del enfoque del problema, pero en la mayoría de los problemas es el camino a seguir.



Aquí pueden emplearse todas las técnicas desarrolladas para redes de cc, con la condición de cambiar lo que antes eran resistencias por impedancias, ya que las redes son de ca; también se debe prestar especial cuidado a las relaciones fasoriales, tanto de las impedancias como de las tensiones y corrientes. Es conveniente seguir utilizando la técnica de diagrama de bloques, por cuestiones de claridad y eficiencia (ver figuras 2.26 y 2.32).

Por lo indicado, una vez que se hayan reemplazado los elementos reactivos y resistivos de un circuito de corriente alterna por sus impedancias de bloque, se pueden aplicar los métodos del *Teorema de Superposición*, de *análisis de corriente de rama*, de *mallas* y de *nodos* por aplicación de las *Leyes de Kirchhoff*, que ya se emplearon en circuitos de cc, con un nivel mínimo de confusión y dificultad.

El análisis se simplificará, posteriormente y de manera similar a lo visto en las redes de cc, a través del uso de los teoremas de redes.

2.1.15 Teorema de Redes

Aquí analizaremos los teoremas de Thévenin y de la Máxima Transferencia de Potencia, tal como se hizo para las redes de cc.

2.1.15.1 Teorema de Thévenin

De manera similar a como hemos visto para las redes de cc, el Teorema de Thévenin permite reducir una red de corriente alterna lineal a la configuración en serie ilustrada en la figura 2.35.

Cualquier red conectada a los terminales de esta red simplificada, es completamente independiente del cambio, ya que la red original y la simplificada son equivalentes.

Además de tener una red con menos elementos, pero con las mismas características terminales, el Teorema de Thévenin nos permite determinar rápidamente el efecto de cambiar la carga sobre la corriente o la tensión de carga.

La determinación de la tensión o de la impedancia de Thévenin, se realiza de igual manera que en las redes de corriente continua, con la única precaución de considerar que se trabaja con fasores.

2.1.15.2 Teorema de la Máxima Transferencia de Potencia

En la red de la figura 2.36, la potencia máxima se transfiere a Z_L cuando la magnitud de Z_L es igual a la de Z_{Th} y sus ángulos asociados son tales que $\phi_L = -\phi_{Th}$.

Es decir que para que ocurra la máxima transferencia de potencia se debe cumplir, simultáneamente que:

$$\begin{cases} |Z_L| = |Z_{Th}| \\ \phi_L = -\phi_{Th} \end{cases} \quad (2.36)$$

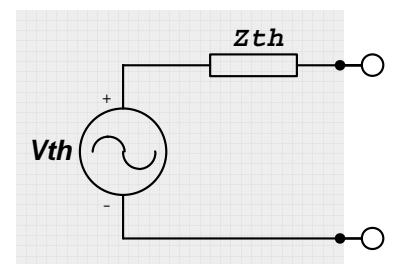


Figura 2.35 Circuito equivalente de Thévenin

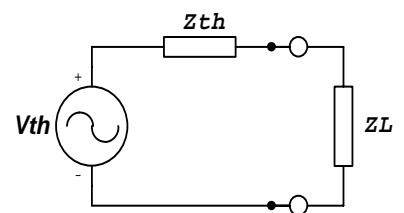


Figura 2.35 Máxima transferencia de potencia.



En forma rectangular, las condiciones son:

$$\begin{array}{l} R_L = R_{Th} \\ y \quad X_{L(c \arg a)} = X_{C_{Th}} \\ o \quad X_{C(c \arg a)} = X_{L_{Th}} \end{array} \quad (2.37)$$

Bajo estas condiciones, se puede demostrar que la potencia máxima hacia la carga está determinada por:

$$P_{L \max} = \frac{V_{Th}^2}{4 R_{Th}} \quad (2.38)$$

2.1.16 Transformador

El transformador es un dispositivo electromagnético diseñado primordialmente para realizar una o varias de las tres (3) funciones siguientes:

- ✓ Elevar o disminuir la tensión o la corriente
- ✓ Actuar como un dispositivo acoplador de impedancias
- ✓ Aislar una parte de una red de otra

En su configuración básica, el transformador presenta dos (2) bobinas devanadas sobre un mismo núcleo de hierro; lo que permite que el coeficiente de inducción mutua entre las dos bobinas sea lo mayor posible. Esto se visualiza en la figura 2.36. En la figura 2.37 y 2.38 se muestra el símbolo utilizado para un transformador ideal, con núcleo de hierro y con núcleo de aire.

El devanado sobre el cual se aplica la señal se denomina “*primario*”, mientras que el devanado al cual está conectada la carga se denomina “*secundario*”.

El núcleo es laminado (hecho de láminas metálicas delgadas separadas por un material aislante) para reducir las pérdidas por corrientes parásitas en el núcleo, lo que lo aleja del transformador ideal. Otra pérdida en el núcleo es la llamada pérdida por histéresis, la que puede reducirse si al hierro se le introduce pequeñas cantidades de silicio. No entraremos aquí en un estudio detallado de estos conceptos. Existen otros factores que hacen que el transformador se aparte del ideal, aunque hoy es factible conseguir transformadores comerciales casi ideales, en un nivel del 95% al 99%.

Volviendo sobre el coeficiente de inducción mutua, éste es el que relaciona la fuerza electromotriz que se induce en el secundario, por efecto del flujo magnético variable creado por la corriente que circula en el primario. Veremos que usaremos relaciones de variables, por lo que no es importante profundizar sobre este concepto.

Básicamente, al aplicar una tensión de corriente alterna al *primario*, se induce un flujo magnético senoidal variable en el núcleo, cuya frecuencia es igual a la de la señal de salida. Este flujo senoidal induce una tensión a través del *secundario*, la cual también es senoidal, con la misma frecuencia que la señal aplicada y con una magnitud relacionada con la entrada por la relación de las vueltas de los devanados. Esto es:

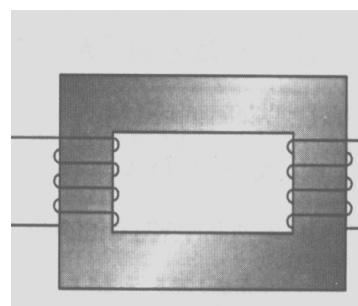


Figura 2.36 Transformador

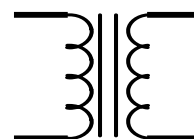


Figura 2.37 Símbolo de un transformador ideal, con núcleo



$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{N_P}{N_S} \quad (2.39)$$

Donde los valores de las tensiones V_P (tensión primaria) y V_S (tensión secundaria) son eficaces y N_P y N_S son los números de vueltas del primario y del secundario, respectivamente.

O sea que, a mayor número de vueltas del secundario respecto del primario, tenemos que la tensión inducida en el secundario es mayor que la tensión del primario, siendo por lo tanto un transformador *elevador* de tensión. Si la relación de espiras es a la inversa, entonces estaremos ante un transformador *reductor*.

Esto puede visualizarse mejor a través de una cantidad llamada *relación de transformación*, la que se define por:

$$a = \frac{N_P}{N_S} \quad (2.40)$$

Si a es menor que 1, tendremos un transformador *elevador*. Si a es mayor que 1, tendremos un transformador *reductor*.

Las corrientes del transformador ideal de núcleo de hierro están relacionadas por:

$$\frac{I_S}{I_P} = \frac{N_P}{N_S} = a \quad (2.41)$$

Como se observa, las corrientes están relacionadas por la inversa de la relación de vueltas, por lo que, si se incrementa la tensión del *secundario* respecto del *primario*, la corriente del *secundario* disminuye respecto de la corriente del *primario*, y viceversa.

Igualando las ecuaciones 2.39 y 2.41 tendremos:

$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{N_P}{N_S} = \frac{I_S}{I_P}$$

Por lo cual:

$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{I_S}{I_P}$$

o

$$V_P I_P = V_S I_S \quad (2.42)$$

Ecuación que establece que, para un transformador ideal, la potencia aparente del primario debe ser igual a la potencia aparente del secundario. Si tuviéramos cargas resistivas, la potencia aplicada es igual a la potencia entregada a la carga.

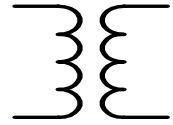


Figura 2.38 Símbolo de un transformador ideal, con núcleo de aire.



Si dividimos la ecuación 2.39 por la ecuación 2.41 y se realizan operaciones matemáticas es posible obtener lo siguiente:

$$\boxed{Z_P = a^2 Z_S} \quad (2.43)$$

Donde $Z_P = V_P / I_P$ y $Z_S = V_S / I_S$

Esto puede expresarse como que la impedancia “observada” en el *primario* de un transformador es la razón de la transformación al cuadrado por la impedancia conectada al *secundario*. Como las impedancias están relacionadas por una constante (a^2), si una carga es capacitiva o inductiva, también se manifiesta como capacitiva o inductiva en el *primario*.

Esto es útil en aplicaciones de audio, por ejemplo, donde el transformador puede emplearse como dispositivo *acoplador de impedancias*.

2.1.16.1 Autotransformador

Una de las principales características de los transformadores es, como ya dijimos, la de aislar eléctricamente un circuito del otro, ya que no existe conexión eléctrica entre el *primario* y el *secundario*, sino una inducción del primero al segundo a través de un efecto magnético.

En determinados casos, es necesario incrementar la capacidad de kilovolt-amperes de un transformador, por lo cual se recurre a la configuración de *autotransformador*, donde el devanado secundario se conecta de tal modo que su tensión se suma a la tensión del devanado primario cuando se determine la nueva tensión secundaria. Esto se muestra en la figura 2.39, con un ejemplo. Allí se comparan las dos configuraciones, para igual tipo de devanados primarios y secundarios.

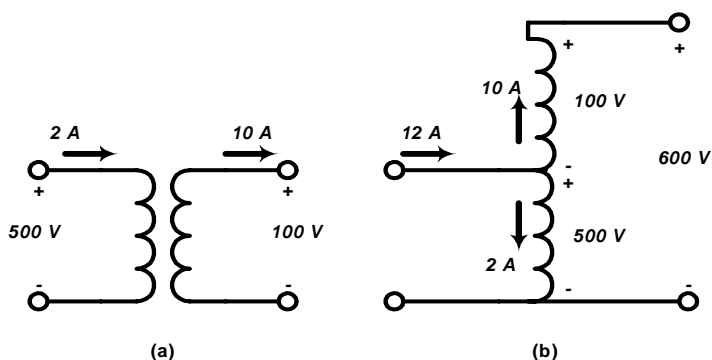


Figura 2.39 Conexiones de un transformador: (a) Configuración clásica, con aislamiento eléctrico; (b) Autotransformador.

Si observamos la figura, vemos que la corriente nominal de cada devanado se indica al lado de cada bobina. Si aplicamos la Ley de las Corrientes de Kirchhoff, vemos que la nueva corriente del *primario* es la suma de las dos (o sea 12 A), mientras que la del *secundario* permanece en 10 A como antes. Los kVA permanecen iguales para el *primario* y el *secundario* a:



$$(500V)(12A) = (600V)(10A) = 6 \text{ kVA}$$

A un nivel seis (6) veces el que se obtiene usando la configuración (a) de la figura 2.39.

Una ventaja adicional de la configuración de autotransformador es una mejor eficiencia nominal, ya que una parte de la energía se transfiere a la salida de manera directa, en lugar de utilizar solo la acción del transformador.

DIVISOR DE TENSIÓN GENERALIZADO

El divisor de tensión que hemos estudiado está constituido por un par de resistencias en serie y puestas a tierra, la tensión de entrada se aplica en el otro extremo de los resistores en serie y la salida se toma de la unión de las dos resistencias. La generalización del simple divisor resistivo es un circuito similar en el cual cada uno o los dos resistores son reemplazado por capacitores o inductores (o combinaciones más complejas de R, L y C) como se muestra en la figura 1. En general, la relación de división de tensión del divisor no es constante y depende de la frecuencia. Del análisis del circuito surge:

$$I = \frac{V_{ent}}{Z_{Total}}$$

$$Z_{Total} = Z_1 + Z_2$$

$$V_{sal} = IZ_2 = V_{ent} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Veamos algunos simples de divisores de tensión pero que son muy importantes denominados filtros

FILTROS

Los filtros dejan pasar ciertos componentes de frecuencia y atenúan o bloquean otras. *Filtran* las frecuencias indeseables. En la figura 2 se ilustran las curvas de respuesta ideales de cuatro tipos de filtros donde el nombre de cada uno de ellos lo toman de la banda o rango de frecuencias que dejan pasar.

Seguiremos con el estudio de filtros simples constituidos por algunos de los componentes R, L y C que constituirán los filtros pasivos en contraposición con los filtros activos que además requieren de elementos amplificadores.

FILTRO PASA-ALTO

Combinando un capacitor con un resistor es posible hacer un divisor de tensión dependiente de la frecuencia, ya que la impedancia del capacitor depende de la frecuencia ($X_C = 1/\omega C$). Este circuito tiene la propiedad de dejar pasar las señales de frecuencias altas y rechazar las bajas indeseables.

En la figura 3 se muestra el divisor de tensión construido con un capacitor y un resistor, mientras en la figura 4 la curva de respuesta de frecuencia del mismo.

Las características de funcionamiento del filtro se pueden entender a partir del efecto de la frecuencia sobre el capacitor. En corriente continua el capacitor actúa como un circuito abierto, por ello no hay circulación de corriente y tampoco hay caída de tensión sobre el resistor, es decir la tensión de salida es nula. A medida que crece la frecuencia de la tensión de entrada la reactancia del capacitor va disminuyendo por lo que comienza a circular una corriente que aumenta a medida que lo hace la frecuencia. Cuando la frecuencia es suficientemente alta la impedancia del capacitor se hace despreciable frente al valor de la resistencia que es la que pasa a limitar la corriente y la caída de potencial sobre la resistencia pasa a ser igual a la tensión aplicada. Prácticamente el capacitor es un cortocircuito a frecuencias altas.

Lo anterior lo podemos expresar matemáticamente:

$$I = \frac{V_i}{Z} = \frac{V_i}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$V_o = IR$$

$$G = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi f C R}\right)^2}}$$

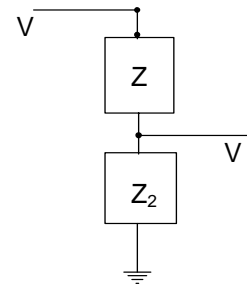


Fig. 1: divisor de tensión con impedancias generalizadas

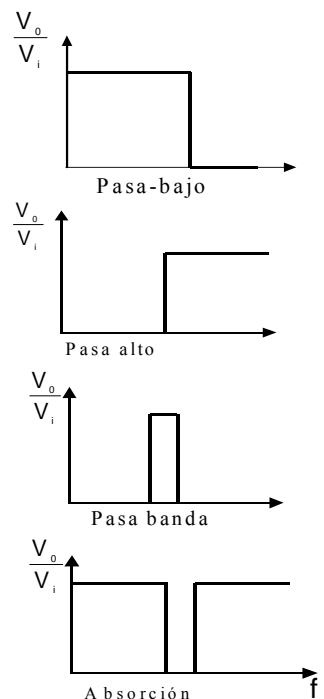


Fig. 2: filtros

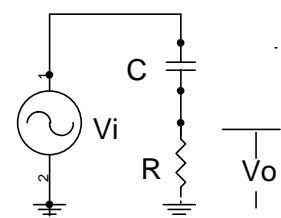


Fig. 3: Filtro pasa-alto

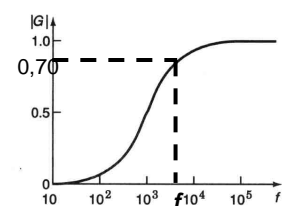


Fig. 4: respuesta en frecuencia filtro pasa-alto

Frecuencia de corte.

La región de transición entre los dos tipos de funcionamiento, banda de paso y banda de rechazo de frecuencias se ubica un valor particular de frecuencia donde la impedancia del capacitor y el resistor tienen el mismo valor:

$$R = \frac{1}{\omega_c C}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Donde f_c se denomina frecuencia de corte y caracteriza la frecuencia donde caracterizamos que comienza el corte.

La ganancia o función del filtro puede expresarse en términos de la frecuencia de corte

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_c^2}{f^2}}}$$

Cuando la frecuencia de entrada al filtro es igual a la frecuencia de corte la amplitud de la salida es $1/\sqrt{2} = 0.707$ de la amplitud de la salida para la banda de paso. Es importante señalar que para esta ganancia de tensión la potencia de salida de la señal se reduce a la mitad de la de entrada ya que la potencia es proporcional al cuadrado de la tensión. Debido a ello la frecuencia de corte también se conoce como *frecuencia de potencia media*.

En la figura se muestra la variación de la magnitud de la ganancia del filtro en función de la frecuencia. Dicha función es compleja posee una parte real y una imaginaria, el filtro no solo afecta la amplitud de la señal de entrada sino también la fase. A frecuencias altas cuando el capacitor se comporta como un cortocircuito la tensión de entrada y la de salida están en fase. A frecuencias muy bajas predomina la reactancia capacitiva la tensión de entrada adelanta 90° con respecto a la corriente y la tensión de salida está en fase con esta última por lo cual hay 90° de diferencia entre la fase de entrada y de salida.

A la frecuencia de corte la diferencia de fase es de 45° situación que se muestra en la figura 5.

En las figuras 6 y 7 se muestran los gráficos de Bode correspondiente a los filtros pasa-alto.

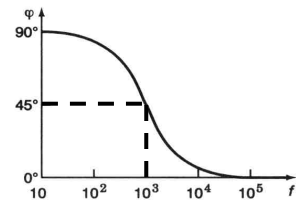


Fig. 5: Respuesta en fase del filtro pasa-alto.

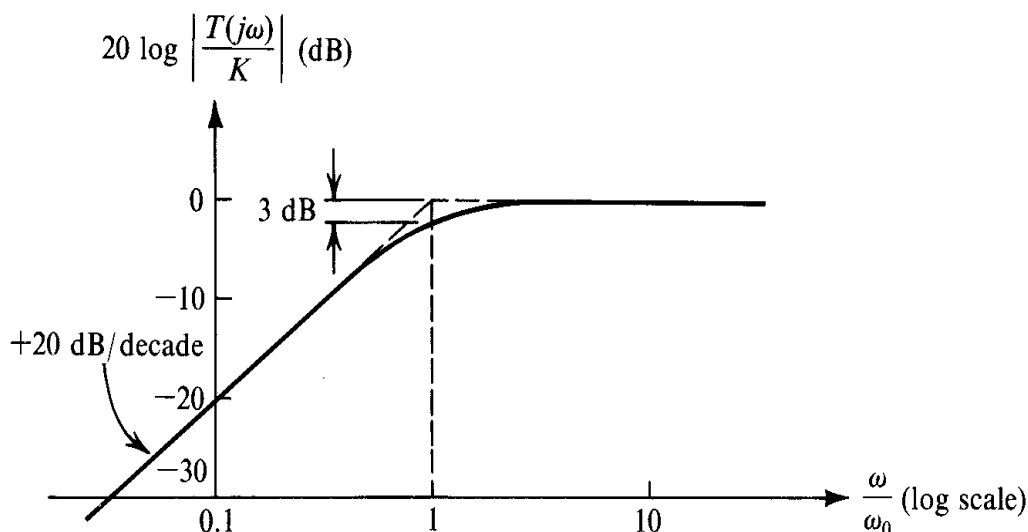


Fig. 6: Diagrama de Bode del filtro pasa-alto

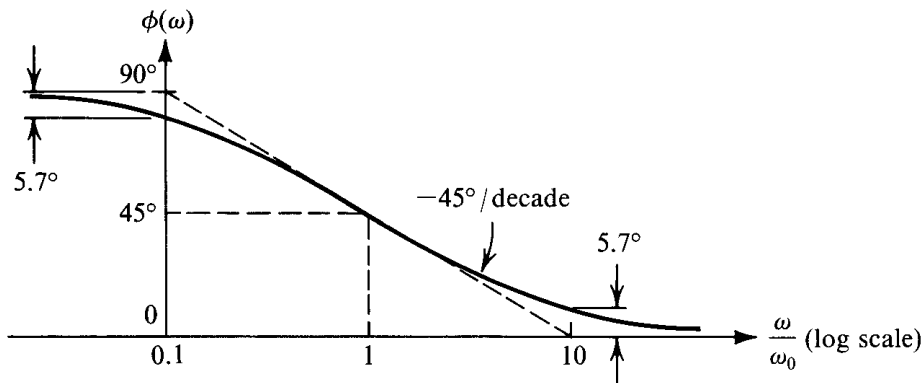


Fig. 7: Respuesta en fase del filtro pasa-alto

FILTRO PASA-BAJO

Intercambiando las posiciones del capacitor y del resistor del filtro pasa-alto el divisor de tensión dependiente de la frecuencia, tiene las propiedades de dejar pasar las señales de frecuencias bajas y rechazar las altas indeseables. En la figura 8 se muestra tal divisor de tensión.

Y en la figura 9 la respuesta a frecuencia del mismo.

Las características de funcionamiento del filtro las podemos explicar teniendo en cuenta el efecto de la frecuencia sobre el capacitor. En corriente continua el capacitor actúa como un circuito abierto, por ello no hay circulación de corriente y tampoco hay caída de tensión sobre el resistor, es decir la tensión de salida es igual a la de entrada. A medida que crece la frecuencia de la señal de entrada la reactancia del capacitor va disminuyendo por lo que comienza a circular una corriente que aumenta a medida que lo hace la frecuencia. Cuando la frecuencia es suficientemente alta la reactancia del capacitor se hace pequeña frente al valor de la resistencia; la caída de potencial sobre la resistencia se incrementa y en el capacitor va disminuyendo tendiendo a cero siendo la tensión sobre el capacitor la de salida. Prácticamente el capacitor es un cortocircuito a frecuencias altas.

Lo anterior lo podemos expresar matemáticamente:

Formula

$$I = \frac{V_i}{Z} = \frac{V_i}{\sqrt{R^2 + X_c^2}}$$

$$V_o = IX_c$$

$$G = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{X_c^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fCR)^2}}$$

Frecuencia de corte, aquella donde la impedancia del capacitor y el resistor tienen el mismo valor:

Es:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

La ganancia o función del filtro puede expresarse en términos de la frecuencia de corte

Formula

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}}$$

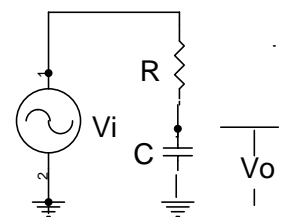


Fig. 8: Filtro pasa-bajo

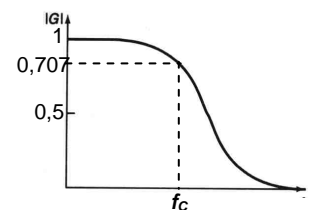


Fig. 9: Respuesta en frecuencia de un pasa-bajo

Cuando la frecuencia de entrada al filtro es igual a la frecuencia de corte la amplitud de la salida es $1/\sqrt{2} = 0.707$ de la amplitud de la salida para la banda de paso. Es importante señalar que para esta ganancia de tensión la potencia de salida de la señal se reduce a la mitad de la de entrada ya que la potencia es proporcional al cuadrado de la tensión. Debido a ello la frecuencia de corte también se conoce como *frecuencia de potencia media*.

En la figura 10 se muestra la variación de la magnitud de la ganancia del filtro en función de la frecuencia. Dicha función es compleja posee una parte real y una imaginaria, el filtro no solo afecta la amplitud de la señal de entrada sino también la fase. A frecuencias altas cuando el capacitor se comporta como un cortocircuito la tensión de entrada y la de salida están en fase. A frecuencias muy bajas predomina la reactancia capacitiva la tensión de entrada adelanta 90° con respecto a la corriente y la tensión de salida está en fase con esta última por lo cual hay 90° de diferencia entre la fase de entrada y de salida. A la frecuencia de corte la diferencia de fase es de 45° .

En las figuras 11 y 12 se muestran los gráficos de Bode correspondiente a los filtros pasa-bajo.

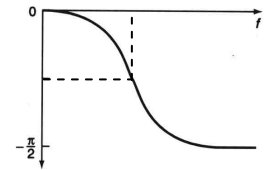


Fig. 10: respuesta en fase de un filtro pasa-bajo

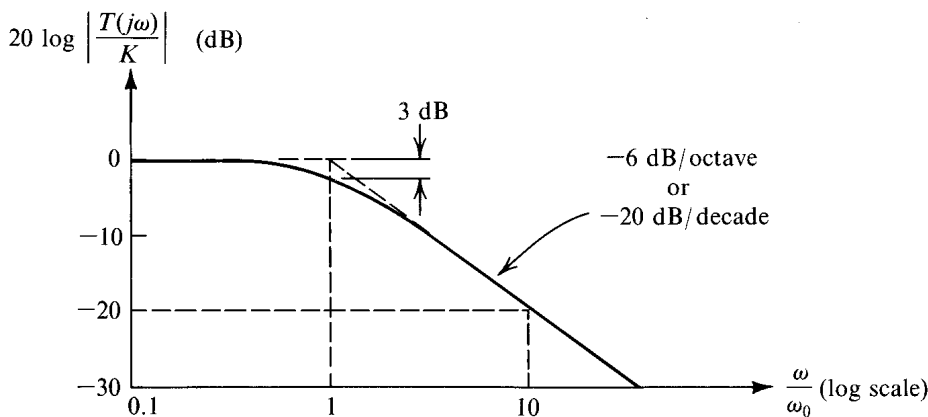


Fig. 11: Diagrama de Bode del filtro pasa-bajo

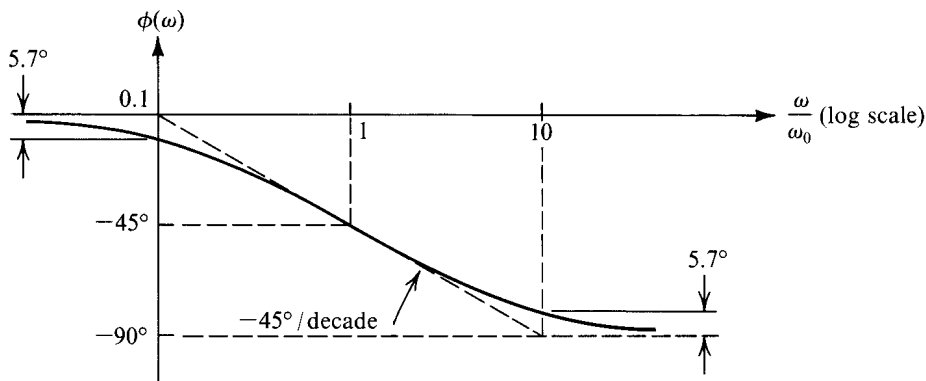


Fig. 12: respuesta en fase del filtro pasa-bajo

CIRCUITO RESONANTE

Cuando combinamos capacitores con inductores es posible construir filtros con una respuesta a frecuencia muy abrupta en comparación con la respuesta gradual de los filtros RC estudiados. Estos filtros tienen aplicación en audiodfrecuencias y más frecuentemente en radiofrecuencia. Veremos a continuación dos circuitos básicos con combinaciones serie y paralelo LC que incluyen un resistor que puede representar la resistencia de pérdidas del inductor real o la resistencia interna del generador que excita el circuito, en teoría de circuitos se conocen como circuitos resonantes serie y paralelo.

Resonancia en serie

Para cada circuito RLC serie existe una frecuencia particular que produce una impedancia de entrada mínima y una transferencia de potencia máxima hacia la red. Además, la energía liberada por un elemento reactivo es exactamente igual a la absorbida por el otro. En otras palabras, durante la primera mitad de un ciclo de entrada el inductor absorbe toda la energía liberada por el capacitor, y durante la segunda mitad del ciclo el capacitor recaptura la misma cantidad de energía procedente del inductor. Esta condición oscilatoria se conoce como estado de *resonancia*, y la frecuencia a la que ello ocurre se llama *frecuencia resonante o de resonancia*.

La configuración RLC en serie ilustrada en la figura 13 se llama *circuito resonante en serie* cuando satisface la condición de máxima transferencia de potencia. Nótese que se requiere tanto un inductor como un capacitor para establecer el estado resonante. La condición de resonancia ocurre cuando

$$X_L = X_C$$

Después de sustituir, se encuentra que la frecuencia resonante se determina por medio de

$$2\pi f_s L = \frac{1}{2\pi f_s C}$$

$$f_s^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$$

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{hertz})$$

En estado de resonancia, la impedancia del circuito es:

$$Z_T = R + j(X_L - X_C) = R + j0$$

$$Z_T = R \quad (\text{en condiciones de resonancia})$$

Como la reactancia neta en estado de resonancia es cero, la potencia aparente es igual a la potencia real, y el factor de potencia del circuito es 1.

En la figura 14 aparece la curva de corriente en función de la frecuencia.

Obsérvese que la corriente es máxima a la frecuencia de resonancia ya que X_L y X_C son del mismo valor pero de signo contrario y por lo tanto se contrarrestan quedando solo el resistor como elemento que se opone a la circulación de corriente. Por debajo de la frecuencia de resonancia la X_C crece y X_L decrece por lo cual comienza a predominar la reactancia capacitiva en el circuito y ello aumenta a medida que decrece la frecuencia. En otras palabras aumenta la impedancia con lo que decrece la corriente. En corriente continua (en régimen permanente) la corriente es cero ya que el circuito se comporta como un circuito abierto.

Por arriba de la frecuencia de resonancia la X_L crece y X_C decrece por lo cual comienza a predominar la reactancia inductiva en el circuito y ello aumenta a medida que crece la frecuencia, con lo que aumenta la impedancia y disminuye la corriente. En altas frecuencias la corriente es cero ya que el circuito se comporta como un circuito abierto.

La potencia entregada en estado de resonancia se determina con la ecuación

Fig. 13: Circuito resonante Serie

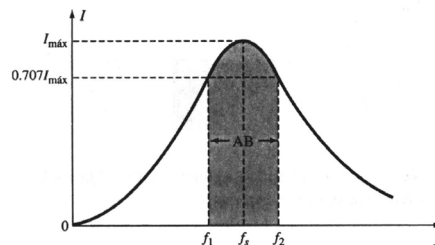
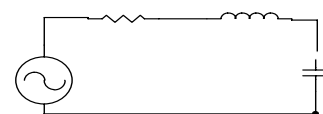


Fig. 14: Curva resonancia serie

$$P_{\text{máx}} = I_{\text{máx}}^2 R$$

donde $I_{\text{máx}} = E/Z_T = E/R$

Si la corriente decae a 0.707 de su valor máximo como se indica en la curva, la potencia entregada se reducirá a

$$P = (0.707 I_{\text{máx}})^2 R = 0.5 I_{\text{máx}}^2 R = 0.5 P_{\text{máx}}$$

o la mitad del valor máximo en estado de resonancia. Las frecuencias f_1 y f_2 se llaman frecuencias de *media potencia* o *frecuencias de corte*. La diferencia entre f_1 y f_2 definen un ancho de banda (AB) como se muestra en la figura 14. En la mayoría de las aplicaciones, se supone que la frecuencia resonante divide el ancho de banda en dos de modo que f_1 y f_2 están equidistantes de f_s . Expresando lo anterior en forma de ecuación

$$AB = f_2 - f_1 \quad (\text{hertz})$$

Se demuestra que el ancho de banda está relacionado con los elementos del circuito como sigue:

$$AB = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} \quad (\text{hertz})$$

Si se define el *factor de calidad* (Q) del circuito resonante como:

$$Q = \frac{X_L}{R}$$

donde X_L es el valor de la reactancia inductiva a la frecuencia resonante.

Operando se obtendrá la siguiente relación:

$$AB = \frac{f_s}{Q} \quad (\text{hertz})$$

El factor de calidad de un circuito proporciona información sobre la forma de la curva de la figura 14 la que también se conoce como curva de *selectividad*. El término proviene del hecho de que se tiene que ser selectivo al seleccionar las frecuencias comprendidas dentro del ancho de banda. Al incrementarse el factor Q , el pico de la curva se angosta y el ancho de banda disminuye como lo indica la ecuación anterior.

Viendo el circuito resonante serie como un divisor de tensión según el esquema de la figura 15 y sabiendo que la impedancia del LC es cero en resonancia la tensión de salida será cero. En la figura 16 vemos la salida del divisor de tensión, como podemos apreciar se trata de un filtro de absorción.

Resonancia en paralelo:

Además del circuito resonante serie existe una red resonante paralela como la mostrada en la figura 17 que también presenta una respuesta de frecuencia similar a la obtenida para I en la figura 13. Sin embargo, en el caso de esta red la variable es la de la tensión V en función de la frecuencia. Nótese además que se requiere tanto una bobina como un capacitor para obtener la condición resonante. La resistencia R puede ser o la resistencia de la bobina o una combinación de tal resistencia y alguna resistencia adicional seleccionada para afectar la forma de la curva de una manera particular. En la condición de resonancia existe una transferencia de energía entre los elementos reactivos. Este circuito resonante también se conoce como circuito *tanque* porque almacena energía en los elementos reactivos. Como se muestra en la figura 13, es una fuente de corriente constante

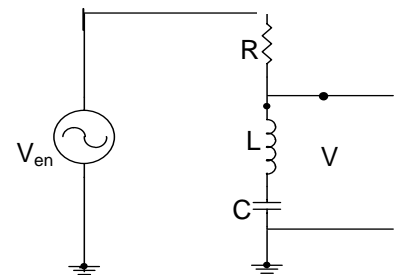


Fig. 15: Circuito Resonante serie como divisor de tensión

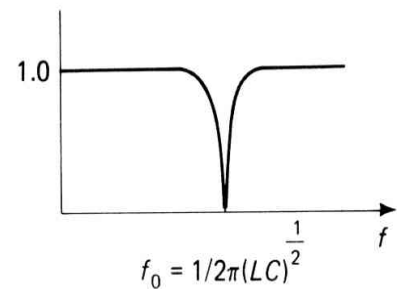


Fig. 16: salida filtro LC serie

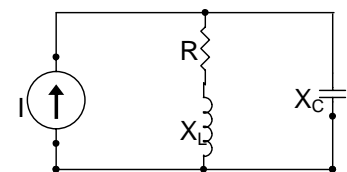


Fig. 17: circuito resonante paralelo

que excita al circuito paralelo en lugar de la fuente de tensión que aparece en el circuito resonante en serie. Este hecho, combinado con la forma de la curva de impedancia en función de la frecuencia de esta red, produce la curva de frecuencia deseada. Como se muestra en la figura 18 la impedancia del circuito resonante en paralelo tiene un máximo a la frecuencia de resonancia y decae a la derecha y a la izquierda de esta frecuencia, tal como ocurre en las características de corriente del circuito resonante serie. La impedancia máxima está dada por:

$$Z_{T_{\max}} = Q_p^2 R$$

donde Q_p es el factor de calidad de la red y en la mayoría de las redes está determinada por

$$Q_p = \frac{X_L}{R}$$

En nuestro caso el interés se concentra en redes en las que $Q_p \geq 10$. Cuando se satisface esta condición, las ecuaciones se simplifican. La mayoría de las situaciones prácticas que se presentan satisfacen esta condición.

En el análisis siguiente obsérvese la similitud entre las ecuaciones para resonancia en paralelo y aquellas para resonancia en serie. Por ejemplo, la resonancia en paralelo ocurre cuando

$$X_L = X_C \quad (Q_p \geq 10)$$

y la frecuencia resonante está determinada por

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (Q_p \geq 10)$$

La tensión sobre el capacitor está determinado por

$$V_C = IZ_T$$

en la que I es la magnitud constante de la fuente de corriente y Z_T es la impedancia dependiente de la frecuencia del circuito tanque ilustrado en la figura 18. Como I es constante, la tensión V_C tiene la misma forma que la curva de impedancia como se muestra en la figura 19.

El ancho de banda está determinado por

$$AB = \frac{f_p}{Q_p}$$

y las frecuencias de media potencia (f_1 y f_2) se definen de la misma forma que para el circuito resonante en serie.

Si el circuito resonante en lugar de estar alimentado por un generador de corriente constante lo alimentara un generador real de tensión, es decir un generador ideal de tensión E en serie con un resistor interno R , y las pérdidas en la inductancia fuesen despreciables; tendríamos el conocido esquema del divisor de tensión generalizado mostrado en la figura 20. Es evidente que el comportamiento del circuito es el de un *filtro pasabanda*.

A la frecuencia de resonancia la impedancia del paralelo LC sería infinita, se comportaría como un circuito abierto y la tensión de salida del filtro sería igual a la del generador E ya que no hay circulación de corriente y por lo tanto caída de tensión en el resistor.

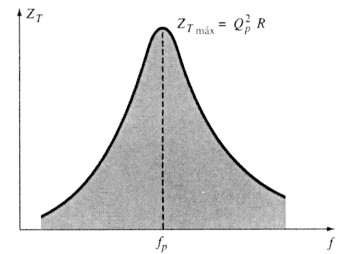


Fig. 18: característica de la impedancia versus frecuencia del circuito LC paralelo.

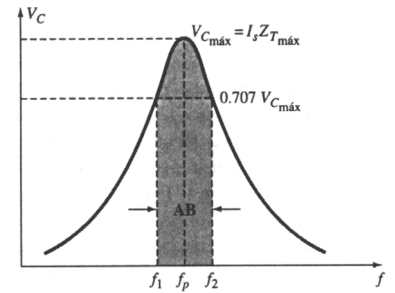


Fig. 19: Curva resonancia paralelo

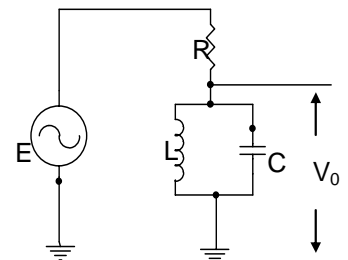


Fig. 20: Filtro pasabanda

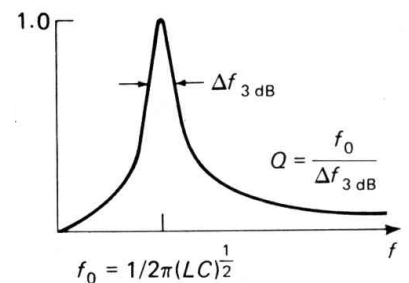


Fig. 21: salida del filtro LC

POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA – CASOS PARTICULARES

Introducción:

El análisis de la potencia que se realizó en el punto 2.7.1. de la guía de estudios presenta el caso para una red general, en esta oportunidad veremos los casos particulares cuando un generador se conecta a un elemento puro o ideal. Ahora examinaremos la ecuación de la potencia total de un modo ligeramente diferente.

Para cualquier sistema como el de la figura 1, la potencia proporcionada a una carga en cualquier instante se define como el producto de la tensión aplicada y la corriente resultante; esto es,

$$p = vi$$

En este caso, dado que v e i son cantidades senoidales, establezcamos un caso general en donde

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$i = I_m \sin \omega t$$

Las v e i elegidas incluyen todas las posibilidades porque, si la carga es puramente resistiva, $\theta = 0^\circ$. Si la carga es puramente inductiva o capacitiva, θ es positivo (v se adelanta a i), y para una red que es principalmente capacitiva θ es negativo (i se adelanta a v).

La sustitución de las ecuaciones anteriores para v e i dentro de la ecuación de potencia, producirá

$$p = V_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t + \theta)$$

Si ahora aplicamos varias identidades trigonométricas, se obtendrá la siguiente forma para la ecuación de potencia:

$$p = VI \cos \theta (1 - \cos 2\omega t) + VI \sin \theta (\sin 2\omega t) \quad (1)$$

en donde V e I son ahora valores eficaces. La conversión de los valores pico V_m e I_m en valores eficaces provino de las operaciones efectuadas usando las identidades trigonométricas.

De inicio podría parecer que nada se ha ganado con colocar la ecuación en esta forma. Sin embargo, la utilidad de la forma de la ecuación (1) se comprobará en las siguientes.

El circuito resistivo:

Para un circuito puramente resistivo (como el de la figura 2), v e i están en fase, y $\theta = 0^\circ$ tal como aparece en la figura 3. Sustituyendo $\theta = 0^\circ$ dentro de la ecuación (1), obtenemos

$$\begin{aligned} p_R &= VI \cos(0^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI \sin(0^\circ) \sin 2\omega t \\ &= VI(1 - \cos 2\omega t) + 0 \end{aligned}$$

o bien

$$p_R = VI - VI \cos 2\omega t$$

En donde VI es el promedio o el término de cd y $-VI \cos 2\omega t$ es una onda coseno negativa con el doble de la frecuencia de la cantidad de entrada (v o i) y un valor pico de VI .

Elaborando la gráfica de la forma de onda para p_R (figura 19.3), vemos que

T_1 = periodo de las variables de entrada

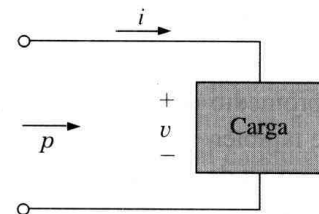


Fig. 1 : Definición de la potencia proporcionada para una carga

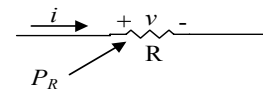


Fig. 2 : Determinación de la potencia proporcionada para una carga puramente resistiva

$T_2 =$ periodo de la curva de potencia p_R

Observe en la figura 3 que la curva de potencia pasa a través de dos ciclos cerca de su valor promedio de VI para cada ciclo o por v o i ($T_1 = 2T_2$ o $f_2 = 2f_1$). Considere también que, debido a que son iguales los valores pico y promedio de la curva de potencia, la curva siempre está sobre el eje horizontal. Esto indica que:

la potencia total proporcionada a un resistor se disipará en forma de calor.

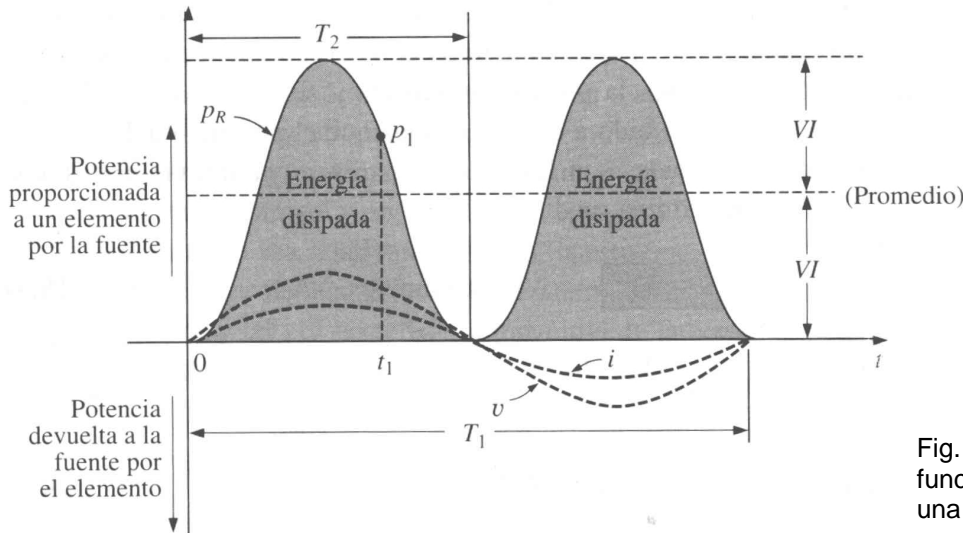


Fig. 3 : Potencia en función del tiempo para una carga puramente

La potencia devuelta a la fuente se representa mediante la porción de la curva debajo del eje, la cual en este caso es cero. La potencia que disipa el resistor es

$$P = VI = \frac{V_m I_m}{2} = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

tal como se vio anteriormente.

El circuito inductivo y la potencia reactiva:

Para un circuito puramente inductivo (como el de la figura 4), v se adelanta a i por 90° , como se observa en la figura 5. Por tanto, en la ecuación (1), $\theta = 90^\circ$. La sustitución de $\theta = 90^\circ$ dentro de la ecuación (1) produce

$$p_L = VI \cos(90^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI \sin(90^\circ)(\sin 2\omega t) = 0 + VI \sin 2\omega t$$

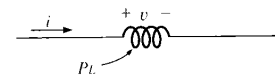


Fig.4

Definición del nivel de potencia para una carga puramente inductiva.

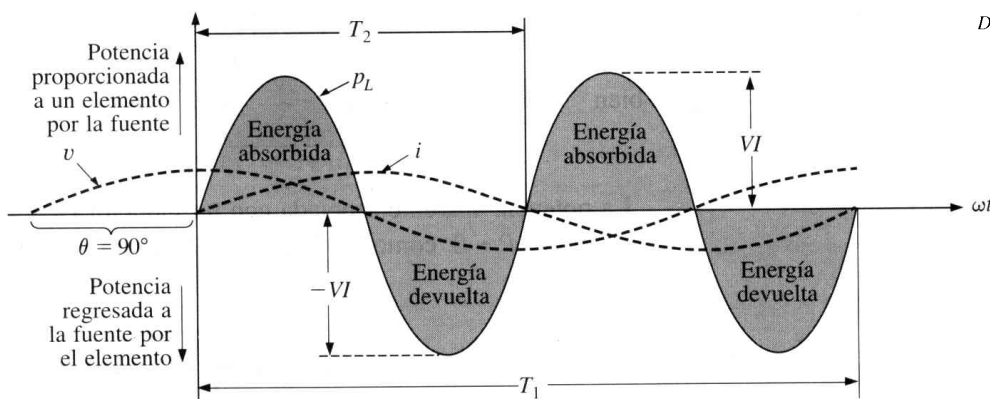


Fig. 5 : Curva de potencia para una carga puramente inductiva

$$p_L = VI \sin 2\omega t \quad (2)$$

en donde $VI \sin 2\omega t$ es una onda de seno con el doble de la frecuencia de cualquier cantidad de entrada (v o i) y un valor pico de VI . Observe la ausencia de un término promedio o constante en la ecuación.

Haciendo la gráfica de la forma de onda para p_L (figura 5), obtenemos

T_1 = periodo de cualquier variable de entrada

T_2 = periodo de la curva p_L

Observe que durante un ciclo completo de p_L (T_2), el área sobre el eje horizontal en la figura 5 es exactamente igual a la que está debajo del eje. Esto indica que durante un ciclo completo de p_L , la potencia que proporciona la fuente al inductor es exactamente igual a la que el inductor devuelve a la fuente.

El flujo neto de potencia para el inductor puro (ideal) es cero durante un ciclo, y no se pierde energía en la transacción.

La potencia que absorbe o devuelve el inductor en cualquier instante t_1 se encuentra simplemente sustituyendo t_1 dentro de la ecuación (2).

El circuito capacitivo

Para un circuito puramente capacitivo (como el de la figura 6), i se adelanta a v por 90° , como se observa en la figura 7. Por tanto, en la ecuación (1), $\theta = -90^\circ$. Sustituyendo $\theta = -90^\circ$ dentro de la ecuación (1), obtenemos

$$\begin{aligned} p_C &= VI \cos(-90^\circ)(1 - \cos 2\omega t) + VI \sin(-90^\circ)(\sin 2\omega t) \\ &= 0 - VI \sin 2\omega t \end{aligned}$$

$$p_C = -VI \sin 2\omega t \quad (3)$$

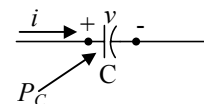


Fig.6 : definición del nivel de potencia para una carga puramente capacitiva

En donde $-VI \sin 2\omega t$ es una onda de seno negativa con el doble de la frecuencia de cualquier entrada (v o i) y un valor pico de VI . Una vez más, observe la ausencia de un término promedio o constante.

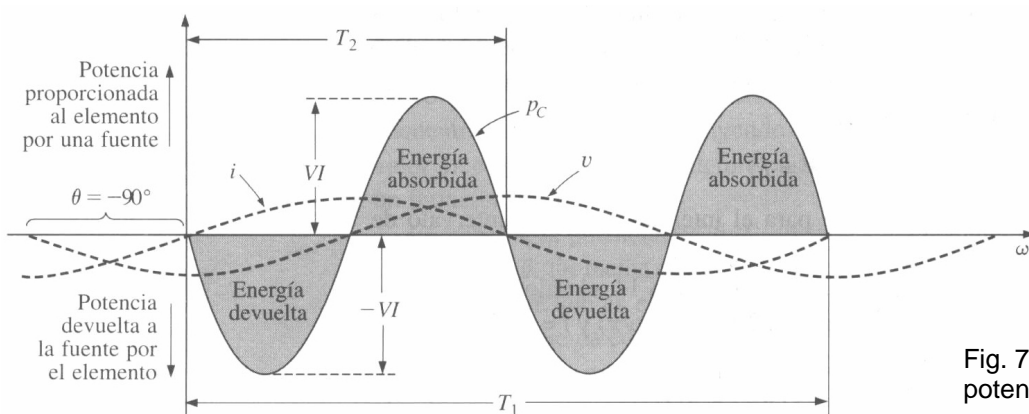


Fig. 7 : curva de potencia para una carga puramente capacitiva

La obtención de la gráfica de forma de onda para p_C (figura 7) produce

T_1 = periodo de cualquier variable de entrada

T_2 = periodo de la curva p_C

Observe que aquí existe la misma situación para la curva p_C que la que existía para la curva p_L . La potencia que el capacitor recibe de la fuente es exactamente igual a la que el capacitor devuelve a la fuente durante un ciclo completo.

El flujo neto de potencia para el capacitor puro (ideal) es cero durante un ciclo completo.

y no se pierde energía en la transacción. La potencia que absorbe o devuelve el capacitor en cualquier instante t_1 se encuentra sustituyendo t_1 dentro de la ecuación (3).